МАТЕМАТИКА

Конспект лекций

для студентов 1 курса

очной формы обучения

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Дисциплина «Математика» входит в общеобразовательный цикл в разделе профильных дисциплин.

Целью изучения дисциплины является получение студентами необходимых знаний и приобретение практических умений в области математики, усвоения внутрипредметных и межпредметных связей с физикой, информатикой, экономикой, а также воспитание достаточно высокой математической культуры.

Задачи дисциплины:

- расширение и систематизация общих сведений о функциях, изучение новых классов элементарных функций;
- расширение и совершенствование математического аппарата, сформированного в основной школе;
- ознакомление с элементами дифференциального исчисления как аппаратом исследования функций, решения прикладных задач;
- изучение свойств пространственных тел, формирование умения применять эти свойства для решения практических задач;
- расширение и углубление представлений о математике как элементе человеческой культуры, о применении её в практике;
- совершенствование интеллектуальных и речевых умений путём развития логического мышления, обогащение математического языка;
- использование математических методов и основ математического моделирования в практической деятельности.

В результате освоения учебной дисциплины обучающийся должен знать:

- значение математики в профессиональной деятельности
- основные понятия и методы математического анализа, теории вероятностей и математической статистики, дискретной математики, основы интегрального и дифференциального исчисления;
- основные математические методы решения прикладных задач в области профессиональной деятельности.

В результате освоения учебной дисциплины обучающийся должен уметь:

- выполнять арифметические действия над числами, сочетая устные и письменные приёмы, применения вычислительных устройств; находить приближенные значения величин и погрешности вычислений (абсолютная и относительная); сравнивать числовые выражения;
- находить значения корня, степени, логарифма, тригонометрических выражений на основе определения, используя при необходимости инструментальные средства; пользоваться приближенной оценкой при практических расчетах;

- выполнять преобразования выражений, применяя формулы, связанные со свойствами степеней, логарифмов, тригонометрических функций;
- строить графики изученных функций, иллюстрировать по графику свойства элементарных функций;
- решать рациональные, показательные, логарифмические, тригонометрические уравнения, сводящиеся к линейным и квадратным, а также аналогичные неравенства и системы;
- находить производные элементарных функций, применять производную для исследования функций и построения графиков, для проведения приближенных вычислений, решения прикладных задач на нахождение наибольшего и наименьшего значения;
- вычислять в простейших случаях площади и объемы с использованием определенного интеграла;
- решать простейшие дифференциальные уравнения;
- решать простейшие комбинаторные задачи методом перебора, а также с использованием известных формул; вычислять в простейших случаях вероятности событий на основе подсчета числа исходов;
- распознавать на чертежах и моделях пространственные формы; соотносить трехмерные объекты с их описаниями, изображениями; изображать основные многогранники и круглые тела; выполнять чертежи по условиям задач; решать простейшие стереометрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей, объемов);
- решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности.

1 ПРИМЕРНЫЙ ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН ДИСЦИПЛИНЫ

Наименование разделов и тем	**№ лекции**	**Содержание учебного материала**
Тема 1. **Введение**	1	Роль математики в науке, технике, экономике, информационных технологиях и практической деятельности. Постановка целей и задач при освоении специальностей СПО.
Тема 2. **Развитие понятия о числе**	2	Целые и рациональные числа. Действительные числа. Приближенные вычисления. Задачи на проценты.
Тема 3. **Корни, степени и логарифмы**	3	Корни и степени. Корни натуральной степени из числа и их свойства. Степени с рациональными показателями, их свойства. Степени с действительными показателями. Свойства степени с действительным показателем.
	4	Логарифм. Логарифм числа. Основное логарифмическое тождество. Десятичные и натуральные логарифмы. Правила действий с логарифмами. Переход к новому основанию.
Тема 4. **Прямые и плоскости в пространстве**	5	Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Параллельность прямой и плоскости. Параллельность плоскостей.
	6	Перпендикулярность прямой и плоскости. Перпендикуляр и наклонная. Угол между прямой и плоскостью.
	7	Двугранный угол. Угол между плоскостями. Перпендикулярность двух плоскостей. Геометрические преобразования пространства: параллельный перенос, симметрия относительно плоскости. Параллельное проектирование. Площадь ортогональной проекции. Изображение пространственных фигур.
Тема 5. **Координаты и векторы**	8	Векторы. Модуль вектора. Равенство векторов. Сложение векторов. Умножение вектора на число. Разложение вектора по направлениям. Проекция вектора на ось. Координаты вектора.
	9	Прямоугольная (декартова) система координат в пространстве. Координаты точки и вектора. Скалярное произведение векторов. Угол между двумя векторами. Формула расстояния между двумя точками. Уравнения сферы, плоскости и прямой.
Тема 6.	10	Основные понятия комбинаторики.

Комбинаторика		
Тема 7. **Основы тригонометрии**	11	Основные понятия. Радианная мера угла. Вращательное движение. Синус, косинус, тангенс и котангенс числа. Основные тригонометрические тождества.
	12	Формулы приведения. Формулы сложения. Формулы двойного аргумента. Формулы половинного угла. Преобразования простейших тригонометрических выражений.
	13	Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение и произведения в сумму. Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента.
	14	Простейшие тригонометрические уравнения. Обратные тригонометрические функции. Арксинус, арккосинус, арктангенс.
	15	Тригонометрические уравнения и неравенства.
	16	Простейшие тригонометрические неравенства.
Тема 8. **Функции, их свойства и графики**	16	Функции. Область определения и множество значений; график функции.
	17	Построение графиков функций, заданных различными способами. Свойства функции. Монотонность, четность, нечетность, ограниченность, периодичность. Промежутки возрастания и убывания, наибольшее и наименьшее значения, точки экстремума. Графическая интерпретация.
	18	Примеры функциональных зависимостей в реальных процессах и явлениях. Арифметические операции над функциями. Сложная функция (композиция). Понятие о непрерывности функции. Обратные функции. Область определения и область значений обратной функции. График обратной функции.
	19	Степенные, показательные, логарифмические и тригонометрические функции. Обратные тригонометрические функции. Определения функций, их свойства и графики.
	20	Преобразования графиков. Параллельный перенос, симметрия относительно осей координат и симметрия относительно начала координат, симметрия

		относительно прямой y = x, растяжение и сжатие вдоль осей координат.
Тема 9. **Многогранники и круглые тела**	21	Вершины, ребра, грани многогранника. Развертка. Многогранные углы. Выпуклые многогранники. Теорема Эйлера. Призма. Прямая и наклонная призма. Правильная призма. Параллелепипед. Куб.
	22	Пирамида. Правильная пирамида. Усеченная пирамида. Тетраэдр. Симметрии в кубе, в параллелепипеде, в призме и пирамиде. Сечения куба, призмы и пирамиды. Представление о правильных многогранниках (тетраэдре, кубе, октаэдре, додекаэдре и икосаэдре).
	23	Цилиндр и конус. Усеченный конус. Основание, высота, боковая поверхность, образующая, развертка. Осевые сечения и сечения, параллельные основанию. Шар и сфера, их сечения. Измерения в геометрии. Объем и его измерение. Интегральная формула объема. Формулы объема куба, прямоугольного параллелепипеда, призмы, цилиндра. Формулы объема пирамиды и конуса. Формулы площади поверхностей цилиндра и конуса. Формулы объема шара и площади сферы. Подобие тел. Отношения площадей поверхностей и объемов подобных тел.
Тема 10. **Начала математического анализа**	24	Последовательности. Способы задания и свойства числовых последовательностей. Понятие о пределе последовательности. Существование предела монотонной ограниченной последовательности. Суммирование последовательностей. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия и ее сумма.
	25	Производная. Понятие о производной функции, ее геометрический и физический смысл. Уравнение касательной к графику функции. Производные суммы, разности, произведения, частные. Производные основных элементарных функций.
	26	Применение производной к исследованию функций и построению графиков. Производные обратной функции и композиции функции. Примеры использования производной для нахождения наилучшего решения в прикладных задачах. Вторая производная, ее геометрический и физический смысл. Нахождение скорости для процесса, заданного формулой и графиком.

Тема 11. **Интеграл и его применение**	27	Первообразная функции и интеграл.
	28	Применение определенного интеграла для нахождения площади криволинейной трапеции. Формула Ньютона—Лейбница. Примеры применения интеграла в физике и геометрии.
Тема 12. **Элементы теории вероятности. Элементы математической статистики**	29	Событие, вероятность события, сложение и умножение вероятностей. Понятие о независимости событий.
	30	Дискретная случайная величина, закон ее распределения. Числовые характеристики дискретной случайной величины. Понятие о законе больших чисел. Представление данных (таблицы, диаграммы, графики), генеральная совокупность, выборка, среднее арифметическое, медиана. Понятие о задачах математической статистики. Решение практических задач с применением вероятностных методов.
Тема 13. **Уравнения и неравенства**	31	Уравнения и системы уравнений. Рациональные, иррациональные, показательные.
	32	Тригонометрические уравнения и системы. Равносильность уравнений, неравенств, систем.
	33	Основные приемы решения уравнений и их систем (разложение на множители, введение новых неизвестных, подстановка, графический метод).
	34	Неравенства. Рациональные, иррациональные, показательные и тригонометрические неравенства. Основные приемы их решения.

2 ЛЕКЦИОННЫЙ МАТЕРИАЛ

2.1 Тема 1 Введение

Лекция 1. Роль математики в науке, технике, экономике, информационных технологиях и практической деятельности. Постановка целей и задач при освоении специальностей СПО

В жизни современного общества математика играет все большую роль. Математика есть универсальный язык науки и мощный метод научною исследования. Математика - это и самая безупречная логика, и объективная доказательность, и наиболее совершенный способ мышления. История математики являет собой грандиозное свидетельство интеллектуального развития человечества за последние тысячелетия. Пьер Гассенди утверждает: «Если мы что-то знаем, то это благодаря изучению математики». По словам М. В. Ломоносова, «математику уже затем учить надо, что она ум в порядок приводит».

Для уяснения роли и значимости математики в научном познании мира необходимо понять, что такое математика. Природа математики (как и любой науки) определяется спецификой ее объекта и предмета изучения, основными методами исследования, а также выделением различных ее характерных черт. Перечислим соответствующие подходы и описания: «Математика является наукой о пространственных формах и количественных отношениях окружающего мира» (Фридрих Энгельс); « Математика есть наука о мере и порядке» (Рене Декарт); « Математика - мера всех вещей. В математике все есть» (физики-теоретики). Приведенные определения высвечивают самые существенные стороны математики и ее методологии.

Объектом математики как науки являются фундаментальные категории формы и количества, взятые в наиболее общем и чистом виде, и всевозможные их проявления. Предметом математики служат разнообразные математические структуры и математические модели, которые появляются (открываются или изобретаются) в результате интеллектуальной деятельности человека как отображение реальности. А общий метод математики есть строгая дедукция.

Итак, математика есть наука о форме и количестве и четких схемах их бытия и воплощения. Поэтому математика универсальна как метод, аппарат исследования и получения научного знания и как точный язык его описания.

Математика имеет многочисленные теоретические и практические приложения, адекватные действительности. Именно в рамках математики возник общенаучный дедуктивный метод, широко применяемый не только в естествознании и технике, но и в гуманитарных науках и обществоведении. Если естественные науки изучают природу, а гуманитарные и социальные науки - человека и человеческое общество, то математика исследует в ее же недрах полученные абстракции, то есть в известном смысле самое себя. В этом отношении математика близка к философии, научная составляющая которой отражена в постоянно развивающейся системе философских категорий.

Российский математик и философ, академик И. Р. Шафаревич отмечал, что «современная научная картина мира зиждется на двух общих принципах: принципе математизации знания и принципе гармонии, или эстетического отбора». Принцип математизации заключается, во-первых, в широком применении математических методов и теорий в других науках, технике и на практике и, во-вторых, в построении наук, особенно естественных, по образу и подобию математики, дедуктивно. Наиболее ярко эта методология выражена в известном тезисе Галилея: «Измерить все, что измеримо, и сделать измеримым то, что таковым пока еще не является».

Из всех наук математика наиболее эстетична и, значит, целесообразна. Английский философ XIII в. Роджер Бэкон утверждал, что «тот, кто не знает математики, не может узнать никакой другой науки и даже не может обнаружить своего невежества». По мнению Галилея, «Философия написана в грандиозной книге - Вселенной, которая открыта нашему пристальному взгляду. Но понять эту книгу может лишь тот, кто научился понимать ее язык и знаки, которыми она изложена. Написана же она на языке математики...». Леонардо да Винчи: «Ни одно человеческое исследование не может называться истинной наукой, если оно не прошло через математические доказательства». И. Кант заметил: «Учение о природе будет содержать науку в собственном смысле лишь в той мере, в какой может быть применена к ней математика».

Математику трудно отнести к естественным, гуманитарным, общественным или техническим наукам. Скорее, математику можно представить как особую науку («царицу наук») и специфическую форму научного познания. Ее значение - в дедуктивном методе, научной методологии, мощном надежном инструментарии, универсальности, действенной красоте, эффективности в приложениях.

Математика играет важную роль в естественно-научных, инженерно-технических и гуманитарных исследованиях. Она стала для многих отраслей знаний не только орудием количественного расчета, но также методом точного исследования и средством предельно четкой формулировки понятий и проблем. Без современной математики с ее развитым логическим и вычислительным аппаратом был бы невозможен прогресс в различных областях человеческой деятельности.

Математика представляет собой основу фундаментальных исследований в естественных и гуманитарных науках. В силу этого значение её в общей системе человеческих знаний постоянно возрастает. Математические идеи и методы проникают в управление весьма сложными и большими системами разной природы: полетами космических кораблей, отраслями промышленности, работой обширных транспортных систем и других видов деятельности. В математике возникают новые теории в ответ на запросы практики и внутреннего развития самой математики. Приложения различных областей математики стали неотъемлемой частью науки, в том числе: физики, химии, геологии, биологии, медицины, лингвистики, экономики, социологии и др.

Математика является не только мощным средством решения прикладных задач и универсальным языком науки, но также и элементом общей культуры. Поэтому математическое образование следует рассматривать как важнейшую составляющую в системе фундаментальной подготовки современного специалиста.

Рассмотрим важность дисциплины «Математика» при освоении программы подготовки СПО по направлению «Сварочное производство».

Современный мир полностью держится на металле. Металл применяется повсеместно: в быту, в промышленности, в строительстве. Сварщик — специалист, занимающийся соединением металлических деталей, узлов, других конструкций методом сплавления металлов. Сварщики трудятся на стройплощадках, создавая конструкции и системы различных коммуникаций, в промышленности, где применяют свой опыт и навыки, в машиностроении, кораблестроении и в других областях. От мастерства сварщиков зависит качество сварочных швов. Любые ошибки, небрежность, допускаемые в работе, могут привести к катастрофическим последствиям. От качества работы сварщика зависит многое — долговечность и устойчивость строительных конструкций, работа и срок службы различной техники. В наши дни стремительно развивающегося технического прогресса к профессии сварщика предъявляются такие требования, как:

- умение разрабатывать меры предупреждения образования дефектов сварных соединений и технологию их устранения;
- выполнять необходимые теоретические и экспериментальные исследования по профилю специальности и составлять отчет по работе;
- уметь производить необходимые вычисления для решения теоретических и прикладных задач по специальности;
- конструирование технологической модели типовых конструкций;
- построение чертежа будущего изделия;
- знание математической символики для выражения количественных и качественных свойств объектов;
- исследование свойств будущих конструкций и оценкой применимости полученных результатов;
- уметь использовать основные понятия и методы геометрических построений и измерений;
- быть способным поставить цель и сформулировать задачи, связанные с реализацией профессиональных функций;

- уметь использовать для решения производственных задач методы изученных им наук.

Создание сварной конструкции, полностью отвечающей своему служебному назначению, надежной в эксплуатации, представляет собой комплексную задачу, которая включает проектирование, расчет, рациональное построение технологии изготовления. Все это требует определенных математических знаний: вычислительных навыков, знания правила пропорции, умения нахождения неизвестного и, конечно же, немало знаний из области геометрии.

Геометрическое проектирование сварочной конструкции помогает не только уменьшить время, затрачиваемое на создание изделия, но и позволяет свести до минимума изменения, вносимые в конструкцию, практически исключить ошибки и улучшить качество изделия. Разработка эскиза и чертежа невозможна без знания определенных понятий геометрии: расстояние между точками, длина отрезка, параллельность и перпендикулярность прямых, окружность, радиус и диаметр и др.

Немаловажным для хорошего сварщика является умение чтения чертежей, опирающееся на понятия перпендикуляра и наклонной, параллельности, линейных размеров и др. (задания на допуск
перпендикулярности оси отверстия относительно поверхности А; допуск параллельности общей прилегающей плоскости поверхностей относительно поверхности А; допуск наклона поверхности относительно поверхности А).

Вычислительно – расчетные задачи требуют умения выполнять действия с числами разного знака, оперировать обыкновенными и десятичными дробями, в том числе приближенными, решать задачи на проценты. В техническом обиходе активно используются такие математические понятия, как соотношение величин, прямая и обратная пропорциональные зависимости, степень числа, решаются уравнения.

Вопросы для самоконтроля:

1. Расскажите о роли математики в науке, технике, экономике, информационных технологиях и практической деятельности.
2. Сформулируйте цели и задачи, стоящие перед обучающимися при изучении дисциплины «Математика».
3. Приведите примеры использования математических понятий в Вашей специальности.

Литература:

[12]; [14]; [16]

2.2 Тема 2 Развитие понятия о числе

Лекция 2. Целые и рациональные числа. Действительные числа. Приближенные вычисления. Задачи на проценты

Число – одно из основных понятий математики, возникшее еще до нашей эры в связи с потребностями счета предметов. Рассмотрим основные числовые множества.

Натуральные числа — это числа, используемые для счета предметов или для указания порядкового номера того или иного предмета среди однородных предметов.

Множество всех натуральных чисел обычно обозначают буквой N. N = {1, 2, 3, ...}.

В системе натуральных чисел выполняются операции сложения и умножения, но не всегда выполняется операция вычитания.

Намного позже люди пришли к понятию отрицательного числа. Необходимость введения этого понятия связана с исследованием величин, которые меняются в двух направлениях: температура, уровень реки, доходы и убытки и т.д. Отрицательные числа стали широко применяться в математике с XVII века в связи с введением метода координат. В Европе отрицательные числа ввел в употребление в XVII в. французский ученый Декарт.

Если к натуральным числам присоединить число 0 и все числа, противоположные натуральным: $-1,-2,-3,-4,\ldots$, то получится множество *целых чисел*. Множество целых чисел обозначается буквой Z = {..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...}. В нем выполняются операции сложения, вычитания и умножения, но не всегда выполняется операция деления.

Рациональные числа. Все целые и дробные числа, как положительные, так и отрицательные, и число ноль образуют множество рациональных чисел Q. Любое рациональное число можно представить в виде дроби $\frac{m}{n}$, где $m \in Z$, $n \in N$.

Утверждение. Любое рациональное число можно записать в виде конечной десятичной дроби или в виде бесконечной десятичной периодической дроби:

$\frac{7}{22}$=0,3181818...=0,3(18)

4=4,000...=4,(0)

7,3777=7,37770000...=7,3777(0)

Верно и обратное: любую бесконечную десятичную периодическую дробь можно представить в виде обыкновенной дроби. Это значит, что любая бесконечная десятичная периодическая дробь есть рациональное число.

Представление рациональных чисел десятичными дробями

1. Превращение обыкновенной дроби в десятичную.

Для превращения обыкновенной дроби в десятичную имеется несколько способов.

1. Чтобы обратить обыкновенную дробь в десятичную, нужно числитель разделить на знаменатель.

Пример. Представить обыкновенную дробь $\frac{3}{25}$ в виде десятичной.

Решение. Поделим числитель на знаменатель в столбик:

$$
\begin{array}{r|l}
3 & 25 \\ \cline{2-2}
-\,30 & 0,12 \\
25 & \\ \cline{1-1}
-\,50 & \\
50 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Таким образом, $\frac{3}{25} = 3 : 25 = 0,12$.

2. Чтобы превратить обыкновенную дробь в десятичную, нужно помножить числитель и знаменатель указанной дроби на такое число, чтобы в знаменателе получилось число, кратное десяти (если это возможно).

Пример. Представить дробь $\frac{3}{25}$ в виде десятичной.

Решение. Знаменатель заданной дроби равен 25, если это число умножить на 4, то получим в результате 100. То есть

$$\frac{3}{25} = \frac{3 \cdot 4}{25 \cdot 4} = \frac{12}{100} = 0,12$$

Замечание. Следует иметь в виду, что не всякая обыкновенная дробь представима в виде конечной десятичной дроби. В виде конечной десятичной дроби можно представить только те обыкновенные дроби, которые после сокращения в знаменателе содержат только простые множители 2 и 5.

Если знаменатель несократимой необратимой дроби содержит хотя бы один простой множитель, отличный от 2 и 5, то она не может быть представлена конечной десятичной дробью.

Напомним, что бесконечная десятичная дробь, у которой одна или несколько цифр повторяются в одной и той же последовательности, называется **периодической** десятичной дробью**.**

Например: $0,123444444444\ldots$; $12,453737373737\ldots$

Повторяющиеся цифры - период - для сокращения записи пишут в круглых скобках.

Например: $0,123444444444\ldots = 0,123(4)$; $12,453737373737\ldots = 12,45(37)$

Пример. Представить дробь $\frac{5}{11}$ в виде десятичной.

```
_5,000000…|11
  0       |0,454545…
_50
  44
 _60
   55
  _50
    44
   _60
     ….
```

Таким образом, $\frac{5}{11} = 0,(45)$.

2. Превращение десятичной дроби в обыкновенную.

Десятичную дробь представляют в виде обыкновенной дроби, записав ее со знаменателем. При этом число целых искомой обыкновенной дроби равно числу целых десятичной дроби. В числителе искомой дроби пишем цифры, стоящие после запятой (десятичные знаки), а в знаменателе записываем 1 с количеством нулей, которое равно количеству десятичных знаков. Далее, если возможно, производят сокращение дроби.

$$10,\underbrace{12345}_{5\text{ штук}} = 10\frac{12345}{\underbrace{100000}_{5\text{ штук}}} = 10\frac{2469}{20000}$$

Если десятичные знаки начинаются нулями, их в числитель обыкновенной дроби писать не нужно.

$$1,\underbrace{00345}_{5\text{ штук}} = 1\frac{345}{\underbrace{100000}_{5\text{ штук}}} = 1\frac{69}{20000}$$

Определение. Чистой периодической дробью называется периодическая дробь, у которой период начинается сразу после запятой.

Например: $2,4949\ldots = 2,(49)$

Определение. Смешанной периодической дробью называется такая десятичная дробь, у которой между запятой и периодом есть не менее одной неповторяющейся бесконечное число раз цифры.

Например: $0,11232323\ldots = 0,11(23)$; $1,54444\ldots = 1,5(4)$

Чтобы обратить чистую периодическую дробь в обыкновенную, достаточно записать числителем ее период, а в знаменателе записать столько девяток, сколько цифр в периоде.

$$0,(3)=0,\underbrace{(3)}_{1\text{ цифра}}=\frac{3}{\underbrace{9}_{1\text{ штука}}}=\frac{1}{3};\ 4,(02)=4,\underbrace{(02)}_{2\text{ цифры}}=4\frac{2}{\underbrace{99}_{2\text{ штуки}}}$$

Чтобы записать смешанную периодическую дробь в виде обыкновенной, надо из числа, стоящего до второго периода вычесть число, стоящее до первого периода, результат записать в числителе; в знаменатель записать число, содержащее столько девяток, сколько цифр в периоде, и столько нулей в конце, сколько цифр между запятой и периодом.

Запишем дробь $2,34(2)$в виде обыкновенной

$$2,34(2)=2,\overbrace{34}^{\substack{2\text{ цифры}\\ \text{до периода}}}\underbrace{(2)}_{\substack{1\text{ цифра}\\ \text{в периоде}}}=\frac{342-34}{900}=\frac{308}{900}=\frac{77}{225}$$

Другой способ представления периодической десятичной дроби в виде обыкновенной.

Пример. Записать в виде обыкновенной дроби бесконечную десятичную периодическую дробь

а) 1,(47) б) 1,3(47).

Решение:

а) Пусть x=1,(47)=1,474747....

Умножим x на такое число, чтобы запятая передвинулась вправо ровно на один период. Поскольку в периоде содержатся две цифры, надо, чтобы запятая передвинулась вправо на две цифры, а для этого число x нужно умножить на 100. Получим:

100x=147,474747... .

Следовательно,

_ 100x=147,474747...

x=1,474747...

100x−x=147,474747...−1,474747...

99x=146

$x=\frac{146}{99}$.

Итак, 1,(47)= $\frac{146}{99}=1\frac{47}{99}$.

б) Пусть x=1,3(47)=1,3474747....

Сначала умножим x на 10, чтобы в полученном произведении период начинался сразу после запятой: $10x$=13,474747... . Теперь число $10x$ умножим на 100 — тогда запятая сместится ровно на один период вправо:

$1000x$=1347,474747... .

Имеем:

$$\begin{array}{r} \_1000x=1347{,}474747... \\ 10x=13{,}474747... \\ \hline 990x=1334; \end{array}$$

$$x=\frac{1334}{990}=1\frac{344}{990}=1\frac{172}{495}.$$

Но существуют операции, которые не всегда выполнимы на множестве рациональных чисел. Например, извлечение корня из положительного числа. Поэтому рациональные числа были дополнены новыми числами – иррациональными.

Иррациональные числа - числа, которые нельзя представить в виде дроби $\frac{m}{n}$, где $m \in Z$, $n \in N$. I = $\{e, \pi, \sqrt{3}, \ldots\}$ – множество иррациональных чисел.

Замечание. Любое иррациональное число - бесконечная непериодическая десятичная дробь.

0,547...557505...113456...

Иррациональные числа можно встретить, извлекая квадратный и кубический корень:

$\sqrt{3}$ = 1,732050... - иррациональное число,

$\sqrt{2}$ = 1,4142135... - иррациональное число.

Одним из известных и часто используемых в математике иррациональных чисел является π, чтобы его получить нужно длину любой окружности разделить на ее диаметр и получится:

π= 3,141592...

Любая арифметическая операция над рациональными числами (кроме, деления на 0) в результате приводит к рациональному числу.

С иррациональными числами же все не так просто, может получиться как рациональное, так и иррациональное число.

Например:

$\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$ - рациональное число, $\sqrt{3} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{15}$ - иррациональное число.

Действительные числа. Объединение рациональных и иррациональных чисел называют **действительными** числами. Множество действительных чисел обозначают символом *R*.

Замечание. Любое действительное число - бесконечная десятичная дробь.

Примеры действительных чисел: 5; 1056; -47; $\frac{3}{7}$; $-57\frac{12}{47}$; $-5{,}36$; $0{,}45(175)$; $-32{,}149385...$; e; π; $\sqrt{10}$; $\cos 3$.

Действительные числа также называют **вещественными.**

Понятно, что N — часть множества Z, а Z — часть множества Q, в свою очередь Q — часть множества R. Для описания этой ситуации в математике имеется специальное обозначение: $\subset$.

Математический символ $\subset$ называют **знаком включения** (одного множества в другое).

Запись $x \in X$ означает, что x — один из элементов множества X. А запись $A \subset B$ означает, что множество A представляет собой часть множества B. Математики чаще говорят так: A — подмножество множества B.

Для записи, что элемент x не принадлежит множеству X или что множество A не является частью (подмножеством) множества B, используют те же символы, но перечеркнутые косой чертой: $x \notin X$, $A \not\subset B$.

Связь между числовыми множествами представлена на рисунке 2.1.

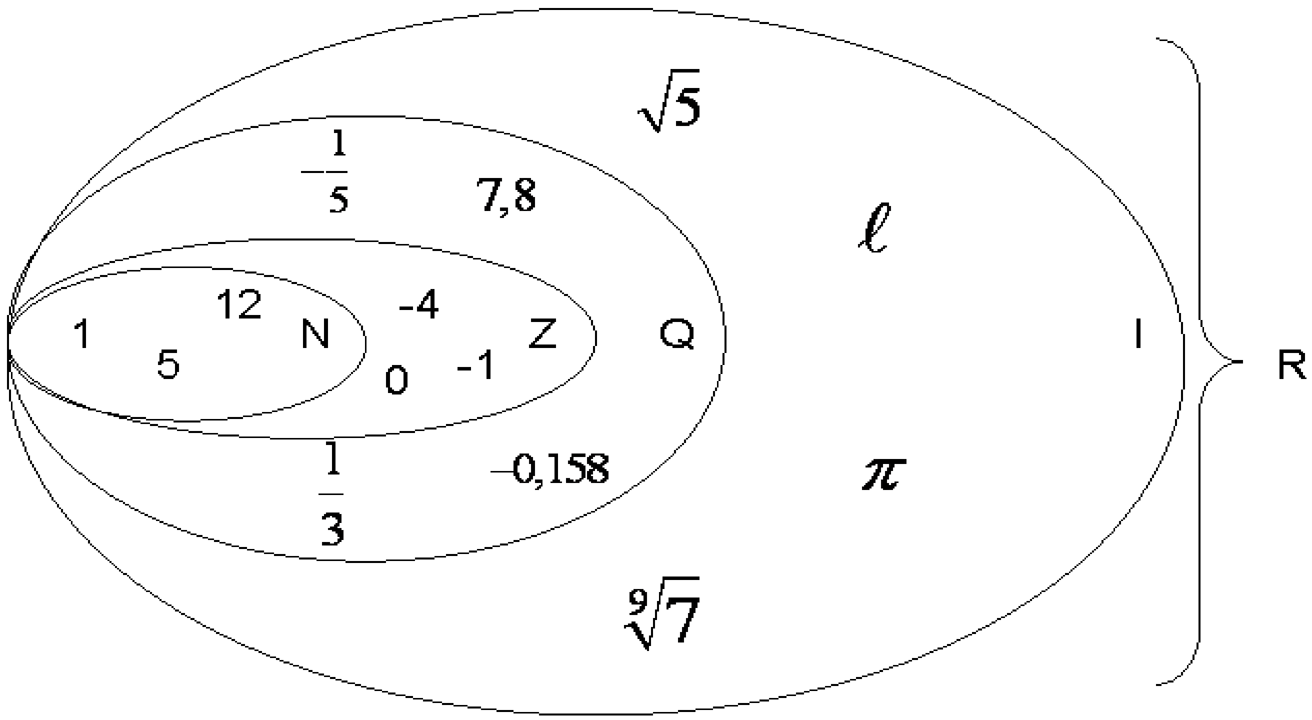


Рисунок 2.1 – Связь между числовыми множествами

Действительные числа позволяют описывать величины, значения которых могут изменяться непрерывно, чего не позволяют делать рациональные и иррациональные числа по отдельности.

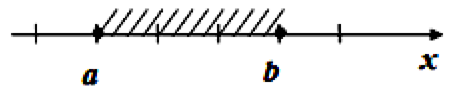
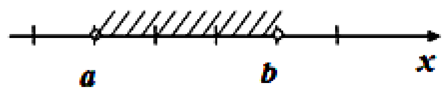
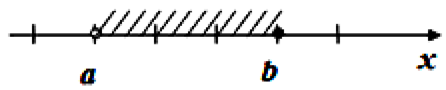
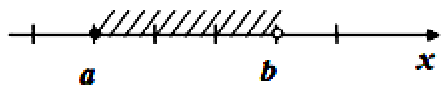
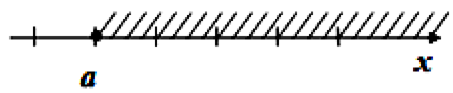
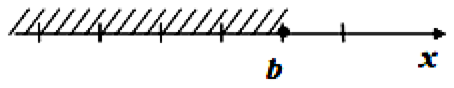
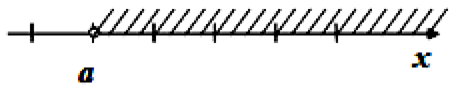
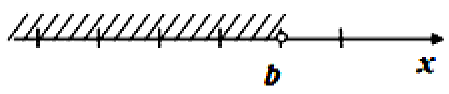
Действительные числа заполняют каждую точку координатной прямой. Каждой точке координатной прямой соответствует единственное действительное число – координата этой точки, а каждому действительному числу соответствует единственная точка на координатной прямой.

Обозначения числовых множеств на координатной оси носят названия **числовых промежутков**. Выделяют следующие виды числовых промежутков:

- открытый числовой луч;
- числовой луч;
- интервал;
- числовой отрезок;
- полуинтервал.

Для удобства сведем все данные о числовых промежутках в таблицу. Занесем в нее название числового промежутка, соответствующее ему неравенство, обозначение и изображение на координатной прямой (табл. 2.1).

Таблица 2.1 – Основные числовые промежутки

название	определение	обозначение	изображение
отрезок	$a \le x \le b,\ x \in R$	$[a, b]$	
интервал	$a < x < b,\ x \in R$	$(a;\ b)$	
полуинтервал	$a < x \le b,\ x \in R$ $a \le x < b,\ x \in R$	$(a;\ b]$ $[a;\ b)$	 
луч	$x \ge a,\ x \in R$ $x \le b,\ x \in R$	$[a;\ +\infty)$ $(-\infty;\ b]$	 
открытый луч	$x > a,\ x \in R$ $x < b,\ x \in R$	$(a, +\infty)$ $(-\infty;\ b)$	 

Если x - **точное** значение числа, a – **приближённое** значение, то $x \approx a$.

Определение. Разность $x-a$ между точным и приближённым значением числа называется **погрешностью приближения**.

Определение. Абсолютной погрешностью приближенного значения числа называется модуль разности между точным и приближенным значением: $\Delta x = |x-a|$.

Часто точное значение величины является неизвестным, следовательно, неизвестным является и точное значение абсолютной погрешности. Поэтому для оценки точности приближения вводится понятие границы абсолютной погрешности.

Определение. Границей абсолютной погрешности приближения $x \approx a$ называется такое положительное число *h,* больше которого абсолютная погрешность быть не может: $\Delta x = |x-a| \le h$.

В этом случае говорят, что величина x приближенно с точностью до h равна a и пишут $x \approx a$ с точностью до h или $x = a \pm h$. Таким образом, истинное значение величины x заключено между границами $a-h$ и $a+h$, т.е. $a-h \le x \le a+h$.

Граница абсолютной погрешности не определяется однозначно, поэтому в качестве границы абсолютной погрешности берут наименьшее число, которое удобно для вычислений и обеспечивает необходимую точность.

Цифра в записи приближенного числа называется **верной**, если абсолютная погрешность числа не превосходит единицы того разряда, в котором записана эта цифра. В противном случае она называется **сомнительной**.

Абсолютная погрешность приближения не характеризует качество измерений. Действительно, если мы измеряем с точностью до 1 см какую-либо длину, то в том случае, когда речь идет об определении длины карандаша, это будет плохая точность. Если же с точностью до 1 см определить длину или ширину волейбольной площадки, то это будет высокая точность.

Для характеристики качества измерения вводится понятие относительной погрешности.

Определение. Относительной погрешностью приближенного значения числа называется отношение абсолютной погрешности к модулю приближенного значения числа $\frac{\Delta x}{|a|} = \frac{|x-a|}{|a|}$.

Относительную погрешность часто обозначают ε и выражают в процентах $\varepsilon = \frac{|x-a|}{|a|} \cdot 100\%$.

Границу относительной погрешности обозначают δ, т.е. $\varepsilon = \frac{\Delta x}{|a|} \le \frac{h}{|a|} = \delta$.

Проценты

Процент — одна сотая часть величины или числа. Обозначается символом %:

$$1\% = 0{,}01 = \frac{1}{100}.$$

Для преобразования десятичной дроби в проценты, ее необходимо умножить на 100. **Например:** 4 = 400%; 0.4 = 40%; 0.04 = 4%; 0.004 = 0.4%.

Для преобразования процентов в десятичную дробь необходимо число процентов разделить на 100. **Например:** 500% = 5; 50% = 0.5; 5% = 0.05; 0.5% = 0.005.

Пример. Швейная фабрика изготовила 1200 платьев, где из них 32% - платья нового фасона. Сколько платьев нового фасона изготовила швейная фабрика?

Решение:

1. 1200 : 100 = 12 (платьев) - 1% от всех выпущенных изделий.

2. 12 х 32 = 384 (платья).

Ответ: фабрика изготовила 384 платья нового фасона.

Для любой бесконечной десятичной дроби (действительного числа) $x = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n a_{n=1} \ldots$ конечная десятичная дробь $x_n = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n$ называется ***n*-м отрезком** этой дроби.

Определеие. Для любого положительного числа $x = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n a_{n=1} \ldots$ число $x_n' = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n$ называется ***n*-м десятичным приближением числа х с недостатком с точностью до** 10^{-n}, а число $x_n'' = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n + 10^{-n}$ называется ***n*-м десятичным приближением числа х с избытком с точностью до** 10^{-n}.

Для любого отрицательного числа $x = -a_0, a_1 a_2 \ldots a_n a_{n=1} \ldots$ ***n*-е десятичные приближения** определяются следующим образом: $x_n' = -a_0, a_1 a_2 \ldots a_n - 10^{-n}$, $x_n'' = -a_0, a_1 a_2 \ldots a_n$.

Используя десятичные приближения с недостатком и с избытком, можно оценить точность приближенных вычислений с действительными числами.

Действия над приближенными значениями чисел

Чтобы приближенно найти сумму, разность, произведение, частное двух бесконечных десятичных дробей, нужно проделать соответствующие действия над их n-ми отрезками.

На практике результаты измерений и вычислений обычно выражаются в виде конечных десятичных дробей. Если в десятичной дроби, равной точному или приближенному значению некоторой величины, десятичных знаков больше, чем это необходимо по практическим соображениям, то эту дробь округляют. Операция округления состоит в отбрасывании единиц младших разрядов начиная с некоторого. Полученное число принимается за приближенное значение этой дроби.

Существуют **три способа округления** положительных десятичных дробей: округление с недостатком, округление с избытком, округление с наименьшей ошибкой.

Округление с недостатком до единиц некоторого разряда состоит в отбрасывании единиц всех младших разрядов. Все цифры дроби до данного разряда включительно не меняются, а цифры младших разрядов заменяются нулями.

Округление с избытком до единиц некоторого разряда отличается от округления с недостатком тем, что число единиц данного разряда увеличивается на единицу.

Округление с наименьшей погрешностью производится по следующим правилам:

1) единицы всех младших разрядов отбрасываются;
2) число единиц данного разряда не меняется, если следующая цифра данной дроби меньше 5, и увеличивается на единицу, если следующая цифра больше или равна 5.

Определение. Значащими цифрами десятичной дроби называют все её цифры, кроме нулей, расположенных левее первой, отличной от нуля цифры.

Определение. Значащими цифрами целого числа называют все его цифры, кроме нулей, расположенных в конце числа, если они стоят взамен неизвестных или отброшенных цифр.

0,$\underline{712}$ – 3 значащие цифры; $\underline{45{,}03}$ – 4 значащие цифры; 0,0016 – 2 значащие цифры.

1. При сложении и вычитании приближенных значений ответ необходимо округлить, оставив после запятой столько цифр, сколько их в менее точном числе.

Пример. Сложить приближенные числа: 2,369; 17,24; 8,653; 94,124.

Предварительно округлим данные числа до сотых и сложим их:

2,37 + 17,24 + 8,65 + 94,12 ≈ 122,38.

2. При умножении и делении приближенных значений ответ необходимо округлить, оставив в нем столько значащих цифр, сколько их в менее точном числе.

Пример. 23,41 · 0,0324 ≈ 0,758484 ≈ 0,758.

3. При вычислении значения выражения в несколько действий, в промежуточных результатах надо оставить на одну цифру больше, чем указано в правилах. В конечном действии последнюю цифру надо округлить.

Граница абсолютной погрешности суммы приближенных значений чисел равна сумме границ абсолютных погрешностей этих чисел:

$\Delta(a+b)=\Delta a+\Delta b$, где a и b – приближенные значения чисел; Δa и Δb – границы абсолютных погрешностей соответствующих приближений.

Граница относительной погрешности суммы вычисляется по формуле: $\varepsilon_{a+b}=\dfrac{\Delta(a+b)}{a+b}$.

Граница абсолютной погрешности разности двух приближенных значений чисел равна сумме границ их абсолютных погрешностей: $\Delta(a-b)=\Delta a+\Delta b$.

Граница относительной погрешности разности вычисляется по формуле: $\varepsilon_{a-b}=\dfrac{\Delta a+\Delta b}{a-b}$.

Формулы для оценки границ абсолютной погрешности произведения (частного) сложны, поэтому на практике сначала находят относительную погрешность произведения (частного), а затем границу абсолютной погрешности произведения (частного).

Формулы для границ абсолютной и относительной погрешности некоторых функций приведены в таблице 2.2.

Таблица 2.2 – Формулы для границ абсолютной и относительной погрешностей

п/п	Функция	Граница абсолютной погрешности	Граница относительной погрешности
	$y=ab$	$\Delta y=\lvert b\rvert\cdot\Delta a+\lvert a\rvert\cdot\Delta b$	$\varepsilon_y=\frac{\Delta a}{a}+\frac{\Delta b}{b}$
	$y=abc$	$\Delta y=\lvert bc\rvert\cdot\Delta a+\lvert ac\rvert\cdot\Delta b+\lvert ab\rvert\cdot\Delta c$	$\varepsilon_y=\frac{\Delta a}{a}+\frac{\Delta b}{b}+\frac{\Delta c}{c}$
	$y=a^n$	$\Delta y=n\,a^{n-1}\cdot\Delta a$	$\varepsilon_y=n\frac{\Delta a}{a}$
	$y=a^2$	$\Delta y=2a\cdot\Delta a$	$\varepsilon_y=2\frac{\Delta a}{a}$
	$y=a^3$	$\Delta y=3a^2\cdot\Delta a$	$\varepsilon_y=3\frac{\Delta a}{a}$
	$y=\sqrt{a}$	$\Delta y=\frac{\Delta a}{2\sqrt{a}}$	$\varepsilon_y=\frac{\Delta a}{2a}$
	$y=\sqrt[3]{a}$	$\Delta y=\frac{\Delta a}{3\sqrt[3]{a^2}}$	$\varepsilon_y=\frac{\Delta a}{3a}$
	$y=\frac{a}{b}$	$\Delta y=\frac{\lvert b\rvert\cdot\Delta a+\lvert a\rvert\cdot\Delta b}{b^2}$	$\varepsilon_y=\frac{\Delta a}{a}+\frac{\Delta b}{b}$

Правила подсчёта цифр:

1. При сложении и вычитании приближённых чисел в результате сохраняют столько десятичных знаков, сколько их в наименее точном числе.

2. При умножении и делении приближённых чисел в результате сохраняют столько значащих цифр, сколько их в числе с наименьшим количеством значащих цифр.

3. При возведении в степень в результате сохраняют столько значащих цифр, сколько их в основании степени.

4. При извлечении корня сохраняют столько значащих цифр, сколько их в подкоренном выражении.

5. При выполнении промежуточных действий оставляют на один знак больше, чем требуют правила, а в результате запасной знак округляют.

6. Если в вычислениях точность задана заранее, то вычисления ведут с запасным знаком, который в результате округляют

Пример. Найти сумму S приближенных значений чисел 6,8±0,05; 4,3±0,05 и 3,575±0,0005.

Решение: вычислим сумму заданных чисел и сумму их погрешностей:

S=6,8+4,3+3,575=14,675;

ΔS=0,05+0,05+0,0005=0,1005.

Граница абсолютной погрешности заключена в пределах 0,05<0,1005<0,5. В приближенном значении суммы верными являются лишь две цифры (в разрядах десятков и единиц). Полученный результат округлим до единиц S=14,675≈15.

Пример. Вычислить разность двух приближенных значений чисел a=5,863±0,0005 и b=2,746±0,0005. Найти *Δ(a-b)* и ε_{a-b}.

Решение: вычисляем границу абсолютной погрешности разности a-b:

Δ(a-b)=0,0005+0,0005=0,001.

В приближенном значении разности цифра в разряде тысячных не может быть верной, так как *Δ(a-b)*>0,0005. Итак, *a-b*=3,117≈3,12. Абсолютная погрешность разности 0,001. В приближенном числе 3,12 все цифры верные. Находим относительную погрешность разности:

$$\varepsilon_{a-b}=\frac{0{,}001}{3{,}12}=0{,}00032\approx 0{,}03\%.$$

Пример. Найти верные цифры произведения приближенных значений чисел a=0,3862 и b=0,8.

Решение: имеем 0,3862·0,8=0,30896. Границы абсолютной погрешности сомножителей равны 0,00005 и 0,05. По формуле $\varepsilon_{ab}=\frac{\Delta a}{a}+\frac{\Delta b}{b}$ находим относительную погрешность произведения:

$$\varepsilon_{ab}=\frac{0{,}00005}{0{,}3862}+\frac{0{,}05}{0{,}8}=0{,}063.$$

Находим границу абсолютной погрешности произведения:

Δ(ab)=0,30896·0,063=0,0195;

0,005<0,0195< 0,05.

Полученный результат означает, что в произведении одна верная цифра (в разряде десятых): 0,30896≈0,3.

Пример. Найти границу абсолютной погрешности частного приближенных значений чисел a=8,36±0,005 и b=3,72±0,004.

Решение: имеем 8,36:3,72=2,25.

По формуле $\varepsilon_y = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$ находим относительную погрешность частного:

$$\varepsilon_{\frac{a}{b}} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} = \frac{0{,}005}{8{,}36} + \frac{0{,}004}{3{,}72} = 0{,}002 = 0{,}2\%.$$

Находим границу абсолютной погрешности частного: $\Delta(a/b)=2{,}25\cdot 0{,}002=0{,}0045$.

Полученный результат означает, что в частном все три цифры верные.

Вопросы для самоконтроля:

1. Что называется множеством и его элементами?
2. Как обозначаются основные числовые множества?
3. Какие основные операции существуют над множествами и как связаны между собой числовые множества?
4. Что представляют собой действительные числа?
5. Как определяется числовой промежуток?
6. Приведите примеры основных типов числовых промежутков.
7. Как можно задать рациональное число?
8. Приведите пример перевода периодической десятичной дроби в рациональное число.
9. Что называется абсолютной и относительной погрешностью приближенного значения числа, как они обозначаются и вычисляются?
10. Зачем нужно знать границу погрешностей?
11. Как находятся верные и сомнительные цифры в приближенной записи числа?
12. Как определяется процент от числа?
13. Что понимается под округлением десятичной дроби?
14. Какие существуют виды округлений?
15. Сформулируйте правила округления с наименьшей ошибкой.
16. Сформулируйте правила действий над приближенными значениями чисел.
17. Какие цифры числа называются значащими?
18. Перечислите действия над приближенными значениями чисел.
19. Перечислите формулы для вычисления границ абсолютной и относительной погрешностей некоторых функций.
20. В чем состоит принцип приближенных вычислений с наперед заданной точностью?
21. Как принято записывать приближенные значения?
22. В чем состоит правило сложения и вычитания приближенных значений?
23. Как определяется граница относительной погрешности?
24. Чему равна граница относительной погрешности степени?

Литература:

[1] С. 3 – 15; [12] – [21].

2.3 Тема 3 Корни, степени и логарифмы

Лекция 3. Корни и степени. Корни натуральной степени из числа и их свойства. Степени с рациональными показателями, их свойства. Степени с действительными показателями. Свойства степени с действительным показателем

1. Корень n –й степени

Определение. ***Корнем n*-ой степени *(n=2,3,4,5...)* из числа *a*** называется такое число *b, n*-ая степень которого равна *a:* $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$.

Число *a* называют **подкоренным выражением**, а число *n* — **показателем** корня.

Нахождение корня *n*-ой степени из числа *a* называется **извлечением корня n-ой степени**.

Если *n*=2, то пишут $\sqrt{a}$ (2 не пишут) и говорят «корень квадратный из *a*».

Если *n*=3, то пишут $\sqrt[3]{a}$ и вместо «корень третьей степени» часто говорят «корень кубический».

Если *n* – нечетное число, то выражение $\sqrt[n]{a}$ имеет смысл при $\forall a$.

Если *n* – четное число, то выражение $\sqrt[n]{a}$ имеет смысл при $a \geq 0$.

Определение. Арифметическим корнем натуральной степени $n \geq 2$ из неотрицательного числа a называется неотрицательное число b, *n* – ая степень которого равна *a,* т.е.

$$\sqrt[n]{a} = b, n \in N, a \geq 0 \Rightarrow b \geq 0.$$

Из определения арифметического корня следует, что если $a \geq 0 \Rightarrow \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a; \sqrt[n]{a^n} = a$.

Если *n* – нечетное число, то существует единственный корень *n*-й степени из любого числа (положительного, отрицательного или равного нулю), причем $\sqrt[2k+1]{a} = -\sqrt[2k+1]{|a|}$.

Это равенство позволяет выразить корень нечетной степени из отрицательного числа через арифметический корень той же степени.

Если *n* – четное число, то $\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|$, т.е. существуют два и только два корня четной степени из любого положительного числа, которые отличаются только знаками.

Примеры.

1. Корень четвертой степени из числа 16 равен 2, т.е. $\sqrt[4]{16} = 2$, т.к. $2^4 = 16$.
2. Выражение $\sqrt[4]{-16}$ не имеет смысла.

2. Основные свойства корней

Свойства формулируется только для неотрицательных значений переменных, содержащихся под знаком корней, т.е. $n \in N, n \geq 2, a \geq 0, b \geq 0$.

2.1 Правило извлечения корня из произведения: $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.

«Корень n-ой степени (n=2,3,4,...) из произведения двух неотрицательных чисел равен произведению корней n-ой степени из этих чисел».

Пример. Вычислить $\sqrt[3]{0{,}125 \cdot 8 \cdot 27}$.

Решение: $\sqrt[3]{0{,}125 \cdot 8 \cdot 27} = \sqrt[3]{0{,}125} \cdot \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} = 0{,}5 \cdot 2 \cdot 3 = 3$

Формулу произведения корней можно применять как слева направо, так и справа налево.

Пример. Вычислить $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9}$.

Решение: $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{3 \cdot 9} = \sqrt[3]{27} = 3$.

2.2 Правило извлечения корня из дроби: $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, b \neq 0$.

«Корень n-ой степени (n=2,3,4,...) из частного двух неотрицательных чисел равен частному корней n-ой степени из этих чисел».

Формула применяется как слева направо, так и справа налево.

Примеры.

1.Вычислить $\sqrt{\dfrac{16}{81}}$. Решение: $\sqrt{\dfrac{16}{81}} = \dfrac{\sqrt{16}}{\sqrt{81}} = \dfrac{4}{9}$.

2. Вычислить $\sqrt{5\dfrac{1}{16}}$. Решение: $\sqrt{5\dfrac{1}{16}} = \sqrt{\dfrac{81}{16}} = \dfrac{\sqrt{81}}{\sqrt{16}} = \dfrac{9}{4} = 2{,}25$.

3. Вычислить $\sqrt[3]{\dfrac{256}{625}} : \sqrt[3]{\dfrac{4}{5}}$. Решение: $\sqrt[3]{\dfrac{256}{625}} : \sqrt[3]{\dfrac{4}{5}} = \sqrt[3]{\dfrac{256}{625} : \dfrac{4}{5}} = \dfrac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{125}} = \dfrac{4}{5}$.

2.3 Правило извлечения корня из корня: $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$.

«Чтобы извлечь корень из корня, достаточно перемножить показатели корней».

Примеры.

1. Упростить: $\sqrt[7]{\sqrt[8]{t}}$. Решение: $\sqrt[7]{\sqrt[8]{t}} = \sqrt[21]{t}$.

2. Вычислить: $\sqrt{\sqrt[4]{256}}$. Решение: $\sqrt{\sqrt[4]{256}} = \sqrt[8]{2^8} = 2$.

2.4 Правило возведения корня в степень: $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$.

«Чтобы возвести корень в натуральную степень, достаточно возвести в эту степень подкоренное выражение».

Примеры.

1. Вычислить: $(\sqrt[3]{2})^6$. Решение: $(\sqrt[3]{2})^6 = \sqrt[3]{2^6} = \sqrt[3]{64} = 4$.

2. Вычислить: $\sqrt[9]{5^{18}}$. Решение: $\sqrt[9]{5^{18}} = \sqrt[9]{\left(5^2\right)^9} = (\sqrt[9]{5^9})^2 = 5^2 = 25$.

2.5 Показатель корня и показатель подкоренного выражения можно умножить на одно и тоже число: $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n\cdot k]{a^k}$.

Это свойство можно прочитать справа налево: «Если показатели корня и подкоренного выражения умножить или разделить на одно и то же натуральное число, то значение корня не изменится».

Примеры.

1. Упростить: $\sqrt[24]{y^{18}}$. Решение: $\sqrt[24]{y^{18}} = \sqrt[4\cdot 6]{y^{3\cdot 6}} = \sqrt[4]{y^3}$.

2. Преобразовать выражение: $\sqrt[28]{128}$. Решение: $\sqrt[28]{128} = \sqrt[28]{2^7} = \sqrt[4]{2}$.

2.6 Правило вынесения множителя из-под знака корня: $\sqrt[n]{a^n b} = a \cdot \sqrt[n]{b}$.

Пример. Вынесите множитель из-под знака корня: $\sqrt[3]{250}$. *Решение:* $\sqrt[3]{250} = \sqrt[3]{125 \cdot 2} = \sqrt[3]{5^3 \cdot 2} = 5\sqrt[3]{2}$

2.7 Внесение множителя под знак корня (обратное предыдущему правилу): $a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$.

Пример. Сравнить числа: $\sqrt[5]{3}$ и $\sqrt[4]{2}$. Решение:

Представим данные числа в виде корней с одним и тем же показателем. Наименьшее общее кратное чисел 5 и 4 – число 20.

$\sqrt[5]{3} = \sqrt[5\cdot 4]{3^4} = \sqrt[20]{81}$, $\sqrt[4]{2} = \sqrt[4\cdot 5]{2^5} = \sqrt[20]{32}$. Теперь можно сравнить подкоренные выражения: т.к. $81 \succ 32$, то $\sqrt[20]{81} \succ \sqrt[20]{32}$.

2.7 Избавление от радикала в знаменателе: $\frac{a}{\sqrt[n]{b}}=\frac{a\cdot\sqrt[n]{b^{n-1}}}{\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{b^{n-1}}}=\frac{\sqrt[n]{a^n b^{n-1}}}{\sqrt[n]{b^n}}=\frac{\sqrt[n]{a^n b^{n-1}}}{b}$.

Пример. Избавиться от иррациональности в знаменателе: $\frac{1}{2\sqrt{6}}$.

Решение: $\frac{1}{2\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{2\cdot 6}=\frac{\sqrt{6}}{12}$.

3. Степень с рациональным показателем

Степень с любым **целым** показателем определялась как $a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n}$, где a – **основание** степени ($a\geq 0$), n – **показатель** степени ($n\in Z$), a^n - **степень.**

Аналогично определим степень с **рациональным** показателем a^r, при этом r - рациональное число, т.е. $r=\frac{m}{n}$, где $m\in Z, n\in N$. Тогда при $a > 0$ справедливо равенство $a^r=a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$.

Благодаря такому определению, удалось сохранить все свойства степеней с целым показателем.

Кроме того, эта формула является базовой для перехода от корней к дробному показателю. Складывать, вычитать, перемножать дроби проще, чем работать с корнями, поэтому принято переходить к степенным функциям с дробным показателем.

Для любых рациональных чисел p и q и a >0 и b >0 верны равенства:

1. $a^p\cdot a^q=a^{p+q}$
2. $a^p:a^q=a^{p-q}$
3. $\left(a^p\right)^q=a^{p\cdot q}$
4. $(ab)^p=a^p\cdot a^q$
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^p=\frac{a^p}{b^p}$
6. Если $a\neq 0$, то $a^0=1$
7. Если $a\succ 0, b\succ 0\Rightarrow a^n\succ b^n$
8. $a^{-n}=\frac{1}{a^n}, где a\neq 0, n\succ 0$.

Примеры.

1. $16^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{16^3}=\sqrt[4]{2^{12}}=2^3=8$

2. $a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{4}} = \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{a} = \sqrt[12]{a^8} \cdot \sqrt[12]{a^3} = \sqrt[12]{a^{11}} = a^{\frac{11}{12}}$

3. $(-32)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{-32} = -\sqrt[5]{2^5} = -2$

4. $3^{-\frac{3}{5}} = \frac{1}{3^{\frac{3}{5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{3^3}} \frac{1}{\sqrt[5]{27}}$

Вопросы для самоконтроля:

1. Что называется корнем *n*-й степени из числа?
2. Что называется арифметическим корнем *n*-й степени из числа?
3. Перечислите свойства арифметических корней *n*-й степени.
4. Назовите правило внесения множителя под знак корня.
5. Назовите правило вынесения множителя из-под знака корня.
6. Как избавляются от иррациональности в знаменателе?
7. Дайте определение степени с натуральным показателем.
8. Перечислите свойства степеней с рациональным показателем.
9. Дайте определение степени с дробным и отрицательным показателем, сформулируйте их свойства.
10. Перечислите свойства степеней с рациональным показателем.

Литература:

[1] С. 93 – 130; [4] С. 231 – 251; [12] – [21].

Лекция 4. Логарифм. Логарифм числа. Основное логарифмическое тождество. Десятичные и натуральные логарифмы. Правила действий с логарифмами. Переход к новому основанию

Определение. Логарифмом положительного числа *b* по основанию *a*, где $a > 0$, $a \neq 1$, называется показатель степени, в которую надо возвести число *a*, чтобы получить число *b*: $\log_a b = n, b = a^n$.

Так как $a^n \succ 0$ для любого n, логарифм отрицательного числа, так же как логарифм нуля, не существует (не имеет смысла).

Из определения логарифма очевидно следует, что $a^{\log_a b} = b$. Это утверждение называют «основным логарифмическим тождеством».

Например, $\log_5 25 = 2$, *т.к.* $5^2 = 25$; $\log_3 3 = 1$, *т.к.* $3^1 = 3$.

Из определения логарифма следуют формулы: $\log_a a = 1$, $\log_a 1 = 0$, $\log_a a^c = c$.

Десятичным логарифмом числа называют логарифм этого числа по основанию 10 и пишут $\lg b$ вместо $\log_{10} b$, т.е. $\log_{10} b = \lg b$.

Натуральным логарифмом числа называют логарифм этого числа по основанию e, где e – иррациональное число, приближённо равное 2,7. При этом пишут $\ln b$ вместо $\log_e b$, т.е. $\log_e b = \ln b$.

Действие нахождения логарифма числа называется **логарифмированием.**

При преобразовании и вычислении значений логарифмических выражений применяют **свойства логарифмов**:

При преобразовании и вычислении значений логарифмических выражений применяют свойства логарифмов:

1. $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$

Логарифм произведения двух положительных чисел равен сумме логарифмов этих чисел.

2. $\log_a \left(\dfrac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$

Логарифм частного равен разности логарифмов делимого и делителя.

3. $\log_a b^r = r \cdot \log_a b$

Логарифм степени равен произведению показателя степени на логарифм основания степени.

4. $\log_{a^p} b = \dfrac{1}{p} \cdot \log_a b$.

5. Формула перехода к другому основанию: $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$.

Следствие: $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$.

Примеры.

1. $\log_3 45 = \log_3 (5 \cdot 9) = \log_3 5 + \log_3 9 = \log_3 5 + 2$

2. $\log_6 4 + \log_6 9 = \log_6 (4 \cdot 9) = \log_6 36 = 2$

3. $\lg \dfrac{1}{3} = \lg 1 - \lg 3 = 0 - \lg 3 = -\lg 3$

4. $\log_2 2^{17} = 17 \log_2 2 = 17 \cdot 1 = 17$

5. $2 \log_3 7 = \log_3 7^2 = \log_3 49$

6. $\log_2 7 = \dfrac{1}{\log_7 2}$

Вопросы для самоконтроля:

1. Дайте определение логарифма.

2. Сформулируйте название действия нахождения логарифма.

3. Запишите основание натурального логарифма.

4. Сформулируйте основное логарифмическое тождество.

4. Сформулируйте теорему о логарифме произведения.

5. Сформулируйте теорему о логарифме частного.

6. Приведите формулу перехода к новому основанию.

6. Какие свойства логарифма используются при выполнении тождественных преобразований?

7. Какой логарифм называется десятичным?

Литература:

[1] С. 148 – 158; [4] С. 352 – 363; [12] – [21].

2.4 Тема 4 Прямые и плоскости в пространстве

Лекция 5. Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Параллельность прямой и плоскости. Параллельность плоскостей

Школьный курс геометрии состоит из планиметрии и стереометрии.

Планиметрия изучает фигуры и их свойства на плоскости. Образно говоря, планиметрия изучает всё, что можно нарисовать или начертить на листе бумаги.

Основные объекты планиметрии - это точки, линии и замкнутые фигуры (например - квадрат, треугольник, круг, трапеция, ромб). Множество всех точек, рассматриваемых в планиметрии образует **плоскость.** Множество точек в планиметрии называется **фигурой.** Замкнутая фигура в планиметрии - это множество точек, ограниченных линией.

Стереометрия изучает фигуры и их свойства в пространстве. Образно говоря, стереометрия изучает всё, что можно склеить из бумаги, сколотить из досок, построить из кирпичей и т.п.

Основными объектами стереометрии являются точки, прямые, плоскости и замкнутые пространственные фигуры – **тела** (например - куб, пирамида, параллелепипед, шар, конус). Множество всех точек, рассматриваемых в стереометрии, называется **пространством.**

В основе каждого курса геометрии лежат **аксиомы** - утверждения, которые принимаются без доказательств. С помощью этих утверждений определяются остальные объекты и их свойства.

В Евклидовой геометрии основные свойства точки, прямой и плоскости, которые относятся к их взаимному расположению, выражены в 20 аксиомах. Сформулируем некоторые из них.

Через любые две точки можно провести только одну прямую.

Через любые три точки, которые не лежат на одной прямой, можно провести только одну плоскость.

Через три точки, лежащие на одной прямой, можно провести бесконечное множество плоскостей.

Если две точки прямой принадлежат плоскости, то все точки этой прямой принадлежат плоскости.

Если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку.

Аксиомы стереометрии

А1. Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, и притом одна.

А2. Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости.

А3. Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.

Следствия из аксиом

1. Через прямую и не лежащую на ней точку можно провести плоскость, притом только одну.

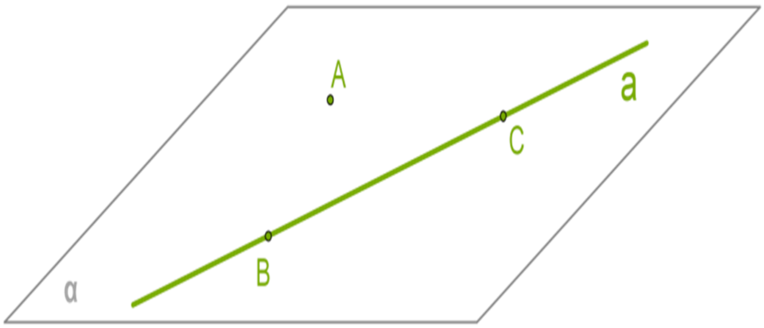


Рисунок 2.2 – Следствие 1

Доказательство:

1) Рассмотрим прямую a и точку A, которая не находится на этой прямой (рис. 2.2) На прямой a выберем точки B и C. 3) Так как все 3 точки не находятся на одной прямой, из второй аксиомы следует, что через точки A, B, C можно провести одну единственную плоскостьα. 4) Точки прямой a, B и C, лежат на плоскостиα, поэтому из третьей аксиомы следует, что плоскость проходит через прямую a и, конечно, через точку A.

2. Через две пересекающиеся прямые можно провести плоскость, притом только одну.

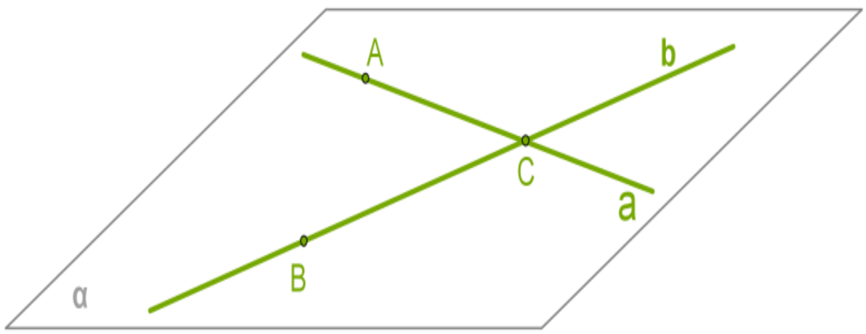


Рисунок 2.3 – Следствие 2

Доказательство:

1) Рассмотрим прямые a и b, которые пересекаются в точке C (рис. 2.3) Выберем точку A на прямой a и точку B на прямой b так, чтобы эти точки не совпадали с точкой C. 3) Из второй аксиомы следует, что через точки A, B и C можно провести одну единственную плоскостьα. В таком случае прямые a и b находятся на плоскости α (судя по третьей аксиоме).

Пример. Даны пересекающиеся отрезки AC и BD. Доказать, что все отрезки AB, BC, CD, DA находятся на одной плоскости (рис. 2.4).

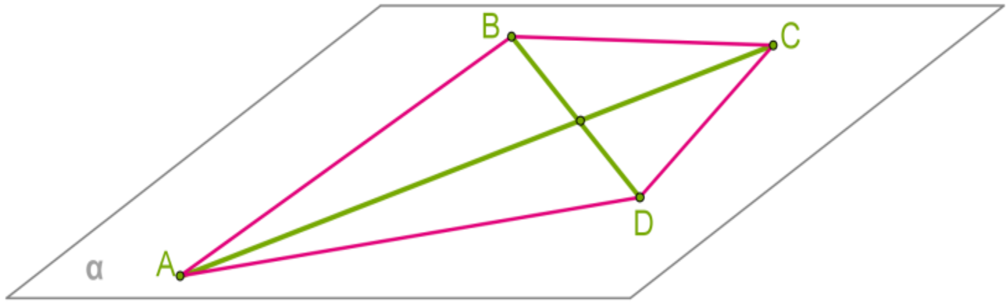


Рисунок 2.4 – Пересекающиеся отрезки

Решение:

1) Из второй теоремы следует, что через AC и BD можно провести только одну плоскость, которую обозначимα. Это значит, что точки A,B,C и D принадлежат плоскости α. 2) Из третьей аксиомы следует, что все точки прямых AB, BC, CD и DA принадлежат плоскости. Поэтому все соответствующие отрезки лежат на плоскости α.

Параллельность прямых, прямой и плоскости

1. Параллельные прямые в пространстве

Определение. Две прямые в пространстве называются **параллельными,** если лежат в одной плоскости и не пересекаются.

Параллельность прямых a и b обозначается так: $a \| b$ или$b \| a$.

Теорема 1. Через две параллельные прямые можно провести плоскость, и при том только одну.

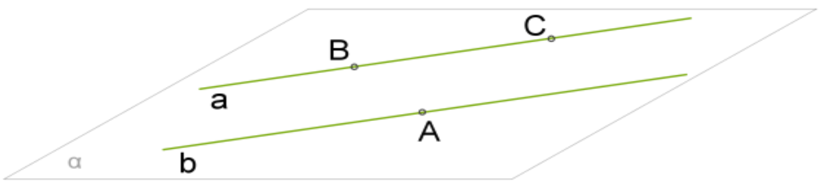


Рисунок 2.5 – Теорема 1

Доказательство:

1. Так как прямые a и b параллельны, из определения следует, что через них можно провести плоскость α.

2. Чтобы доказать, что такая плоскость только одна, на прямой a обозначаем точки B и C, а на прямой b точку A.

3. Так как через три точки, которые не лежат на одной прямой, можно провести только одну плоскость (2 аксиома), то α является единственной плоскостью, которой принадлежат прямые a и b.

Теорема 2. Через любую точку пространства вне данной прямой можно провести прямую, параллельную данной прямой, и при том только одну.

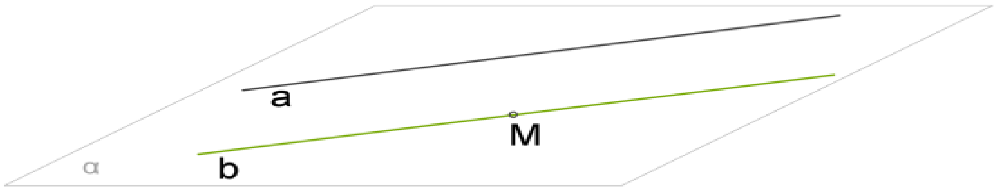


Рисунок 2.6 – Теорема 2

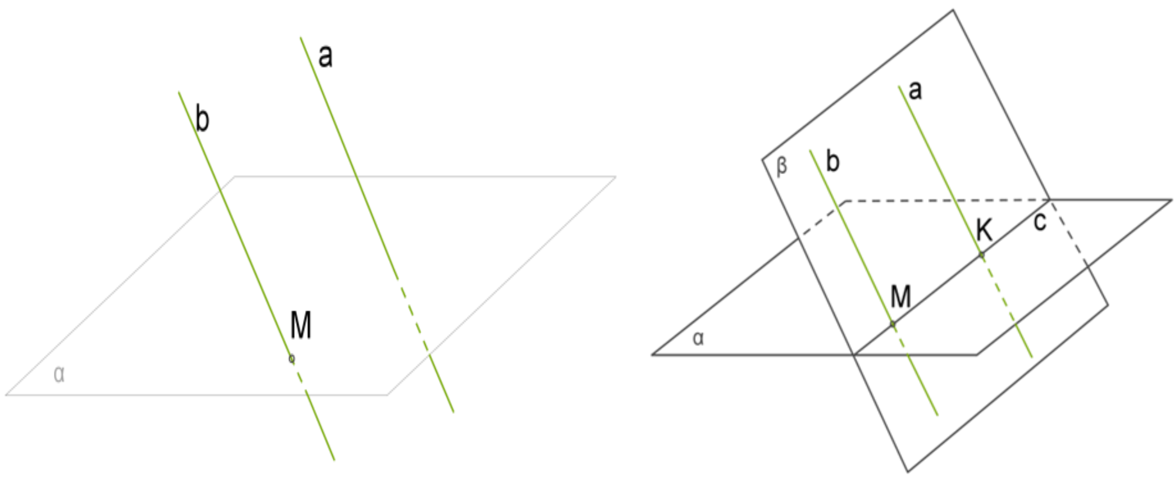
Доказательство:

1. Через данную прямую a и точку M, которая не лежит на прямой, проводится плоскость α.

2. Такая плоскость только одна (т.к. через прямую и не лежащую на ней точку можно провести плоскость, и притом только одну).

3. А в плоскости α через точку M можно провести только одну прямую b, которая параллельна прямой a.

Теорема 3. Если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость.



а) б)

Рисунок 2.7 – Теорема 3

Доказательство:

Рассмотрим две параллельные прямые a и b и допустим, что прямая b пересекает плоскость α в точке M (рис. 2.7, а).

Из 1-ой теоремы известно, что через параллельные прямые a и b можно провести только одну плоскость β.

Так как точка M находится на прямой b, то M также принадлежит плоскости β (рис 2.7, б). Если у плоскостей α и β есть общая точка M, то у этих плоскостей есть общая прямая c, которая является прямой пересечения этих плоскостей (4 аксиома).

Прямые a, b и c находятся в плоскости β.

Если в этой плоскости одна из параллельных прямых b пересекает прямую c, то вторая прямая a тоже пересекает c.

Точку пересечения прямых a и c обозначим за K.

Так как точка K находится на прямой c, то K находится в плоскости α и является единственной общей точкой прямой a и плоскости α.

Значит, прямая a пересекает плоскость α в точке K.

Теорема 4. Две прямые, параллельные третьей прямой, параллельны.

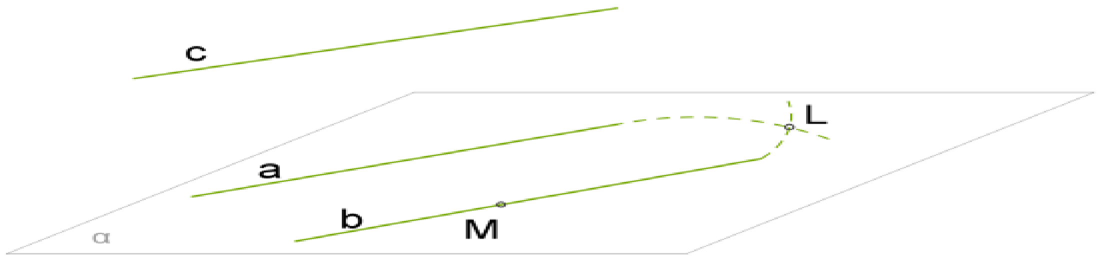


Рисунок 2.8 – Теорема 4

Дано: $a \parallel c$ и $b \parallel c$

Доказать: $a \parallel b$

Доказательство:

Выберем точку M на прямой b. Через точку M и прямую a, которая не содержит эту точку, можно провести только одну плоскость α (Через прямую и не лежащую на ней точку можно провести только одну плоскость).

Возможны два случая:

1) прямая b пересекает плоскость α или 2) прямая b находится в плоскости α.

Пусть прямая b пересекает плоскость α.

Значит, прямая c, которая параллельна прямой b, тоже пересекает плоскость α. Так как $a \parallel c$, то получается, что a тоже пересекает эту плоскость. Но прямая a не может одновременно пересекать плоскость α и находиться в плоскости α. Получаем противоречие, следовательно, предположение, что прямая b пересекает плоскость α, является неверным. Значит, прямая b находится в плоскости α.

Теперь нужно доказать, что прямые a и b параллельны.

Пусть у прямых a и b есть общая точка L.

Это означает, что через точку L проведены две прямые a и b, которые параллельны прямой c. Но по второй теореме это невозможно. Поэтому предположение неверное, и прямые a и b не имеют общих точек.

Так как прямые a и b находятся в одной плоскости α и у них нет общих точек, то они параллельны.

Всё множество прямых в пространстве, которые параллельны данной прямой, называется **пучком** параллельных прямых.

Выводы:

1) Любые две прямые пучка параллельных прямых параллельны между собой.

2) Параллельности прямых в пространстве присуща транзитивность: если $a \parallel b$ и $b \parallel c$, то $a \parallel c$.

Пример.

Одна сторона параллелограмма пересекает плоскость. Докажите, что прямая, которая содержит противоположную сторону параллелограмма, тоже пересекает эту плоскость (рис. 2.9).

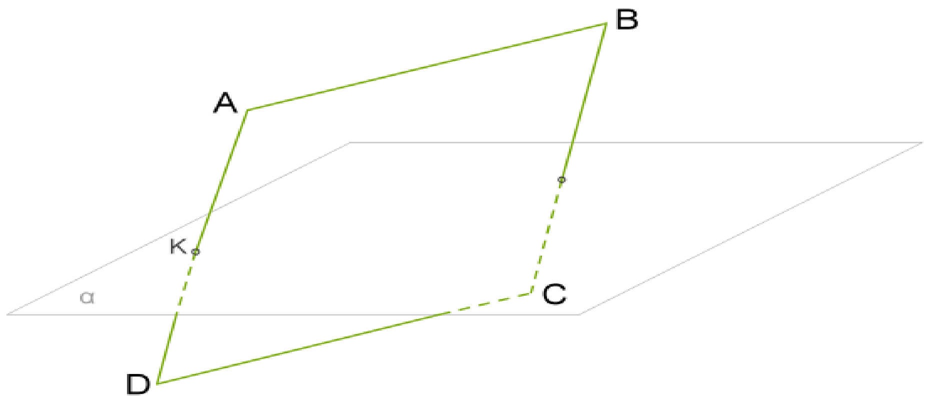


Рисунок 2.9

Допустим, что у параллелограмма $ABCD$ сторона AD пересекает плоскость α в точке K.

Так как противоположные стороны параллелограмма параллельны, то, согласно третьей теореме, прямая, которая содержит сторону CD, тоже пересекает плоскость α.

2. Параллельность прямой и плоскости

Согласно аксиомам, если две точки прямой находятся в некоторой плоскости, то прямая лежит в этой плоскости. Отсюда следует, что возможны **три случая взаимного расположения прямой и плоскости в пространстве**:

1) прямая лежит (находится) в плоскости;

2) прямая и плоскость имеют только одну общую точку (прямая и плоскость пересекаются);

3) прямая и плоскость не имеют общих точек.

Определение. Прямая и плоскость называются **параллельными,** если они не имеют общих точек.

Теорема. „Признак параллельности прямой и плоскости” Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой на этой плоскости, то эта прямая параллельна данной плоскости.

Рисунок 2.10 – Признак параллельности прямой и плоскости

Доказательство:

Доказательство проведем от противного. Пусть a не параллельна плоскости α, тогда прямая a пересекает плоскость в некоторой точке A. Причем A не находится на b, так как $a \| b$. Согласно теореме 3 прямая b также пересекает плоскость α. Но это невозможно, так как прямая b лежит в плоскости α. Мы пришли к противоречию. Итак, прямая a не пересекает плоскость α, значит прямая a должна быть параллельна плоскости α.

Следующие две теоремы очень часто используются при решении задач.

Теорема 1. Если плоскость β проходит через данную прямую a, параллельную плоскости α, и пересекает эту плоскость по прямой b, то $b \| a$.

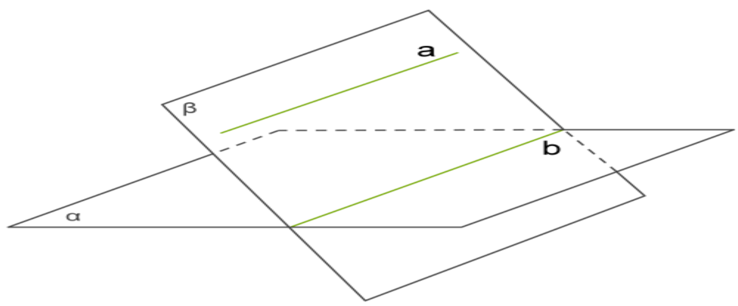


Рисунок 2.11 –Теорема 1

Прямую b иногда называют **следом** плоскости β на плоскости α.

Теорема 2. Если одна из двух параллельных прямых $a \parallel b$ параллельна данной плоскости α, то другая прямая либо параллельна этой плоскости либо лежит в этой плоскости.

3.Взаимное расположение прямых в пространстве. Угол между двумя прямыми

Как известно из курса планиметрии, две прямые в плоскости могут:

- пересекаться (имеют общую точку);

- быть параллельными (не имеют общую точку);

- совпадать.

В пространстве мы можем представить ситуацию, когда две прямые не пересекаются, но они и не параллельны. Например, одна дорога проходит по эстакаде, а другая под эстакадой, или горизонтальные линии крыши и вертиккальные линии стен.

Определение. Две прямые называются **скрещивающимися,** если они не лежат в одной плоскости.

Теорема. "Признак скрещивающихся прямых"

Если одна из двух прямых лежит в некоторой плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на первой прямой, то эти прямые скрещивающиеся (не лежат в одной плоскости).

Доказательство:

Рассмотрим прямую *AB* лежащую в плоскости и прямую *CD*, которая пересекает плоскость в точке *D*, не лежащей на прямой *AB* (рис. 2.12).

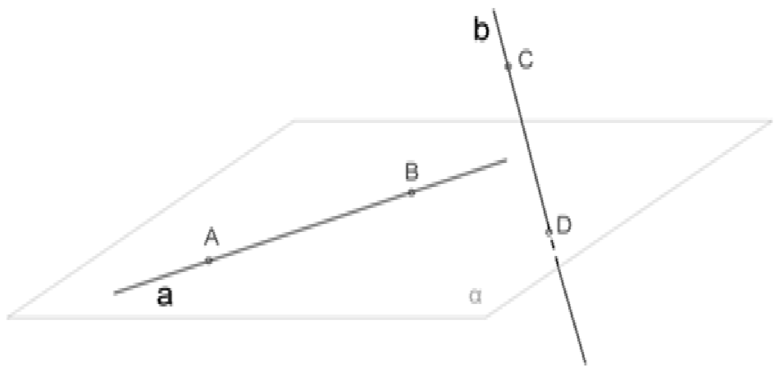


Рисунок 2.12 – Признак скрещивающихся прямых

1. Допустим, что прямые *AB* и *CD* всё-таки лежат в одной плоскости.
2. Значит эта плоскость идёт через прямую *AB* и точку *D*, то есть она совпадает с плоскостью α.
3. Это противоречит условиям теоремы, что прямая *CD* не находится в плоскости α, а пересекает её.

Теорема доказана.

В пространстве прямые расположены следующим образом:

1. Параллельные

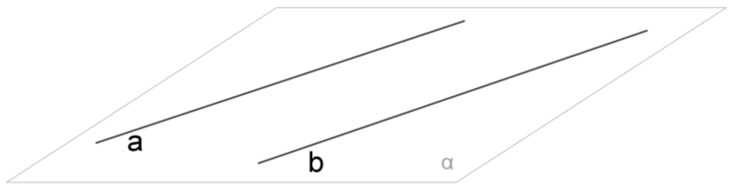


Рисунок 2.13 – Параллельные прямые

2. Пересекающиеся

Рисунок 2.14 – Пересекающиеся прямые

3. Скрещивающиеся

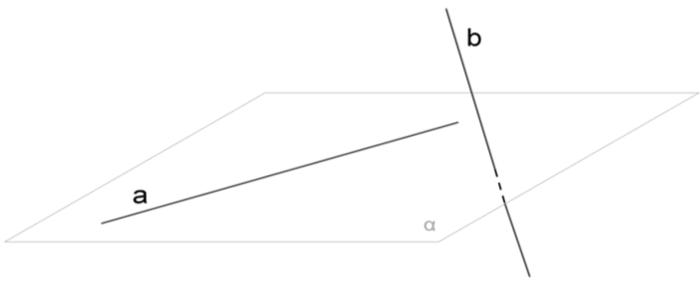


Рисунок 2.15 – Скрещивающиеся прямые

Теорема. Через каждую из двух скрещивающихся прямых проходит плоскость, параллельная другой прямой, и притом только одна.

Доказательство:

Рассмотрим скрещивающиеся прямые *AB* и *CD* (рис. 2.16).

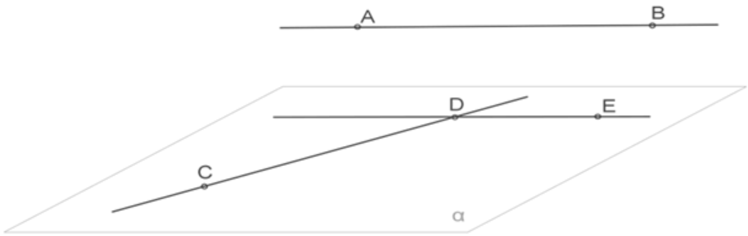


Рисунок 2.16 – Теорема о скрещивающихся прямых

1. Через точку D можно провести прямую DE параллельную AB.
2. Через пересекающиеся прямые CD и DE можно провести плоскость α
3. Так как прямая AB не лежит в этой плоскости и параллельна прямой DE, то она параллельна плоскости.

4. Эта плоскость единственная, так как любая другая плоскость, проходящая через CD, будет пересекаться с DE и AB, которая ей параллельна.
Теорема доказана.

Углы между прямыми

1.Если прямые параллельны, то **угол** между ними 0°.

2. **Углом** между двумя **пересекающимися** прямыми называют величину меньшего из углов, образованных этими прямыми.

Если все углы равны, то эти прямые перпендикулярны (образуют угол 90°).

3. **Углом** между двумя **скрещивающимися** прямыми называют угол между двумя пересекающимися прямыми, соответственно параллельными данным скрещивающимся прямым. (Провести соответственные параллельные прямые данным скрещивающимся прямым можно через любую точку. Иногда удобно выбрать эту точку на одной из данных скрещивающихся прямых и провести через эту точку прямую параллельную другой из скрещивающихся прямых).

Пример.

Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найти угол между AB и B_1D_1 (рис 2.17).

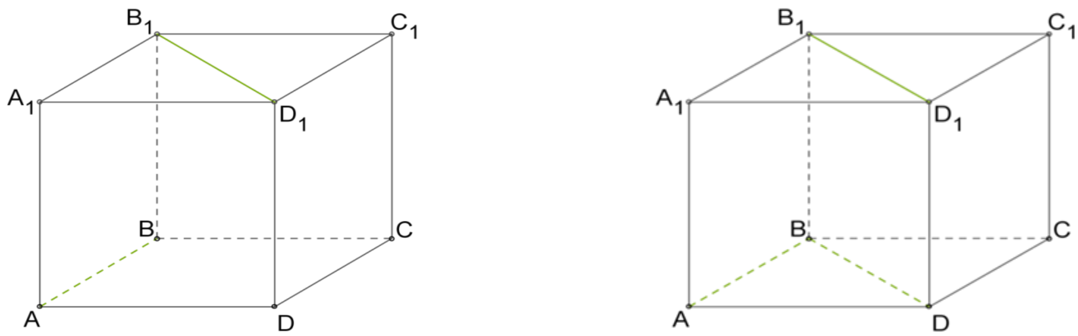


Рисунок 2.17

Решение: Выберем точку B на прямой AB и проведём через B прямую BD параллельно B_1D_1. Угол между AB и BD 45°, так как $ABCD$ квадрат. Соответственно угол между AB и B_1D_1 тоже 45°.

4.Параллельность плоскостей

Как известно из аксиом стереометрии, если плоскости имеют одну общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку. Значит, две плоскости или пересекаются по прямой, или не пересекаются.

Определение. Плоскости, которые не пересекаются, называются **параллельными**.

Параллельные плоскости α и β обозначаются $\alpha \| \beta$.

Например, любая конструкция с полом, потолком и стенами даёт нам представление о параллельных плоскостях – пол и потолок как две параллельные плоскости, боковые стены как параллельные плоскости.

Теорема. «Признак параллельности плоскостей»

Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

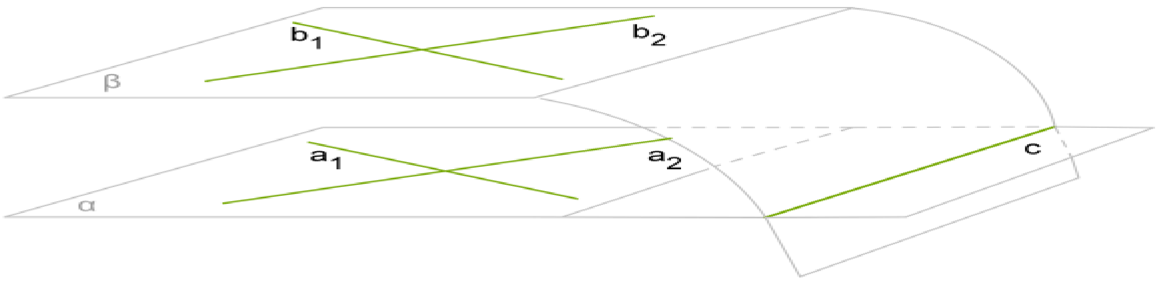


Рисунок 2.18 –Признак параллельности плоскостей

Доказательство:

Пусть α и β - данные плоскости, a_1 и a_2 – пересекающиеся прямые в плоскости α, а b_1 и b_2 соответственно параллельные им прямые в плоскости β.

Допустим, что плоскости α и β не параллельны, то есть они пересекаются по некоторой прямой c.

Прямая a_1 параллельна прямой b_1, значит она параллельна и самой плоскости β.

Прямая a_2 параллельна прямой b_2, значит она параллельна и самой плоскости β (признак параллельности прямой и плоскости).

Прямая c принадлежит плоскости α, значит хотя бы одна из прямых a_1 или a_2 пересекает прямую c, то есть имеет с ней общую точку. Но прямая c также принадлежит и плоскости β, значит, пересекая прямую c, прямая a_1 или a_2 пересекает плоскость β, чего быть не может, так как прямые a_1 и a_2 параллельны плоскости β.

Из этого следует, что плоскости α и β не пересекаются, то есть они параллельны.

Свойства параллельных плоскостей

Теорема 1. Если две параллельные плоскости пересекаются третьей, то линии их пересечения параллельны.

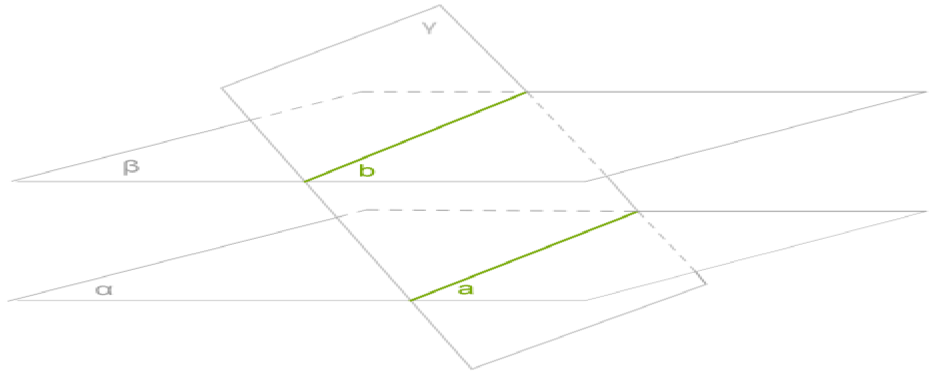


Рисунок 2.19 – Свойства параллельных плоскостей Теорема 1

Доказательство:

Пусть α и β - параллельные плоскости, а γ- плоскость, пересекающая их.

Плоскость α пересекается с плоскостью γ по прямой a.

Плоскость β пересекается с плоскостью γ по прямой b.

Линии пересечения a и b лежат в одной плоскости γ и потому могут быть либо пересекающимися, либо параллельными прямыми. Но, принадлежа двум параллельным плоскостям, они не могут иметь общих точек. Следовательно, они параллельны.

Теорема 2. Отрезки параллельных прямых, заключенных между двумя параллельными плоскостями, равны.

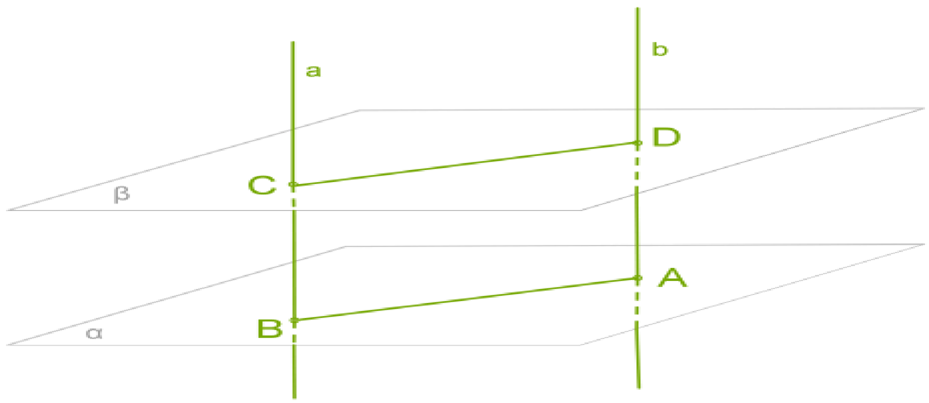


Рисунок 2.20 – Свойства параллельных плоскостей Теорема 2

Доказательство:

Пусть α и β - параллельные плоскости, а a и b – параллельные прямые, пересекающие их.

Через прямые a и b можно провести плоскость - эти прямые параллельны, значит определяют плоскость, причём только одну.

Проведённая плоскость пересекается с плоскостью α по прямой AB, а с плоскостью β по прямой CD.

По предыдущей теореме прямые AB и CD параллельны. Четырехугольник $ABCD$ есть параллелограмм (у него противоположные стороны параллельны). А раз это параллелограмм, то противоположные стороны у него равны, то есть $BC=AD$.

Вопросы для самоконтроля:

1. Что изучает стереометрия?
2. Сформулируйте основные аксиомы стереометрии и их следствия .
3. Дайте определение параллельным прямым.
4. Какие возможны случаи расположения прямых в пространстве?
5. Дайте определение скрещивающимся прямым.
6. Дайте определение углу между прямыми в пространстве.
7. Укажите случая взаимного расположения прямой и плоскости в пространстве
8. Дайте определение параллельным плоскостям.
9. Сформулируйте признаки параллельности прямой и плоскости.
10. Сформулируйте признаки параллельности прямых в пространстве.

Литература:

[3] С. 3-23; [6] С. 14 – 18, 96 – 110; [12] – [21].

Лекция 6. Перпендикулярность прямой и плоскости. Перпендикуляр и наклонная. Угол между прямой и плоскостью

1.Перпендикулярность прямой и плоскости

Перпендикулярные прямые в пространстве

Определение. Две прямые в пространстве называются **перпендикулярными**, если угол между ними равен 90°.

В пространстве перпендикулярными называют не только пересекающиеся прямые, но и скрещивающиеся прямые, так как мы говорим об угле, который могут образовать эти прямые, если их поместить в одной плоскости.

Так же, как и на плоскости, в пространстве перпендикулярные прямые a и b обозначают $a \perp b$.

Лемма. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к третьей прямой, то и другая перпендикулярна к этой прямой.

Перпендикулярность прямой и плоскости

Определение. Прямая, пересекающая плоскость, называется **перпендикулярной** этой плоскости, если она перпендикулярна каждой прямой, лежащей в данной плоскости.

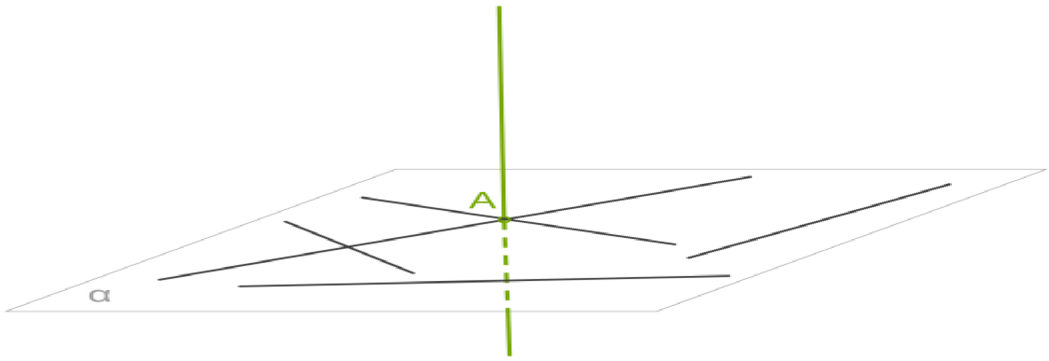


Рисунок 2.21 – Перпендикулярность прямой и плоскости

Перпендикулярность прямой и плоскости обозначается как $a \perp \alpha$.

Говорят также, что плоскость α перпендикулярна прямой a.

Через любую точку пространства проходит прямая перпендикулярно данной плоскости, притом только одна.

Теорема. «Признак перпендикулярности прямой и плоскости» Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым в плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.

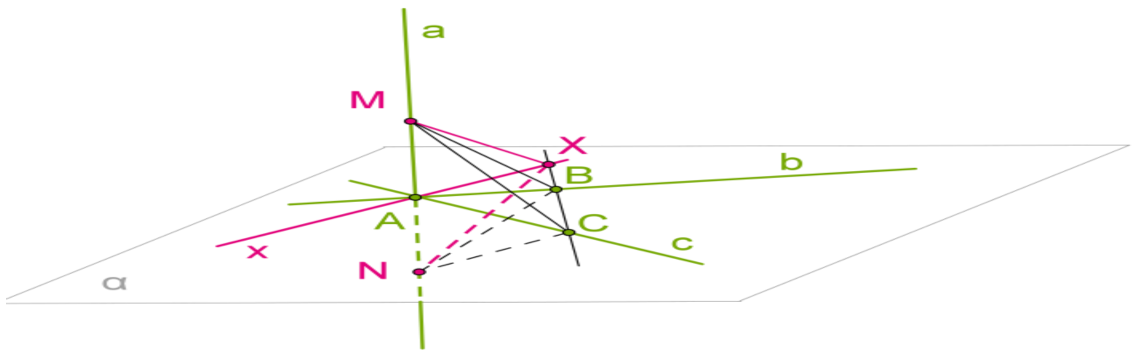


Рисунок 2.22 – Признак перпендикулярности прямой и плоскости

Доказательство:

Пусть a — прямая, перпендикулярная прямым b и c в плоскости. Проведём прямую a через точку A пересечения прямых b и c. Докажем, что прямая a перпендикулярна плоскости, то есть каждой прямой в этой плоскости.

1. Проведём произвольную прямую x через точку A в плоскости и покажем, что она перпендикулярна прямой a. Проведём в плоскости произвольную прямую, не проходящую через точку A и пересекающую прямые b, c и x. Пусть точками пересечения будут B, C и X.

2. Отложим на прямой a от точки A в разные стороны равные отрезки AM и AN.

3. Треугольник MCN равнобедренный, так как отрезок AC является высотой по условию теоремы и медианой по построению ($AM=AN$). По той же причине треугольник MBN тоже равнобедренный.

4. Следовательно, треугольники MBC и NBC равны по трём сторонам.

5. Из равенства треугольников MBC и NBC следует равенство углов MBX и NBX и, следовательно, равенство треугольников MBX и NBX по двум сторонам и углу между ними.

6. Из равенства сторон MX и NX этих треугольников заключаем, что треугольник MXN равнобедренный. Поэтому его медиана XA является также высотой. А это и значит, что прямая x перпендикулярна a. По определению прямая a перпендикулярна плоскости.

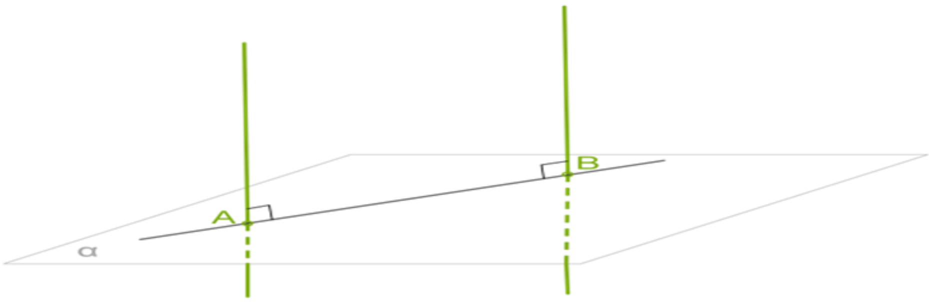


Рисунок 2.23 – Свойства перпендикулярных прямой и плоскости

Свойства перпендикулярных прямой и плоскости

1. Если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой.

2. Две прямые, перпендикулярные одной и той же плоскости, параллельны.

2. Перпендикуляр и наклонная

Наклонной, проведенной из данной точки к данной плоскости, называется любой отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости и не являющийся перпендикуляром к плоскости.

Конец отрезка, лежащий в плоскости, называется **основанием наклонной**.

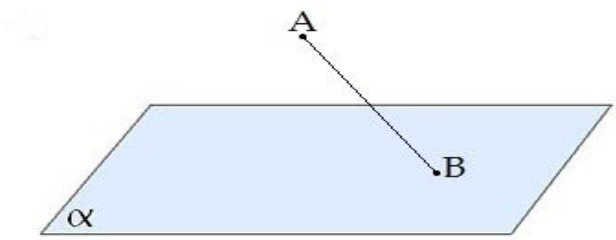


Рисунок 2.24 – AB – наклонная. B – основание наклонной.

Перпендикуляром, проведенным из данной точки к данной плоскости, называется отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости и лежащий на прямой, перпендикулярной плоскости.

Конец этого отрезка, лежащий в плоскости, называется **основанием перпендикуляра**.

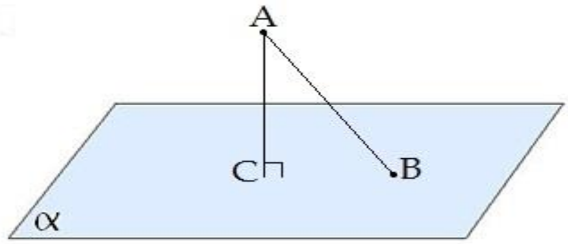


Рисунок 2.25 – *AC* – перпендикуляр. *C* – основание перпендикуляра.

Расстоянием от точки до плоскости называется длина перпендикуляра, проведенного из этой точки к плоскости.

Отрезок, соединяющий основания перпендикуляра и наклонной, проведенных из одной и той же точки, называется **проекцией наклонной**.

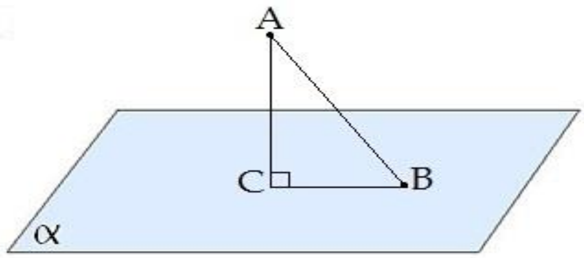


Рисунок 2.26 – *CB* – проекция наклонной *AB* на плоскость α.

Треугольник *ABC* прямоугольный.

Углом между наклонной и плоскостью называется угол между этой наклонной и её проекцией на плоскость.

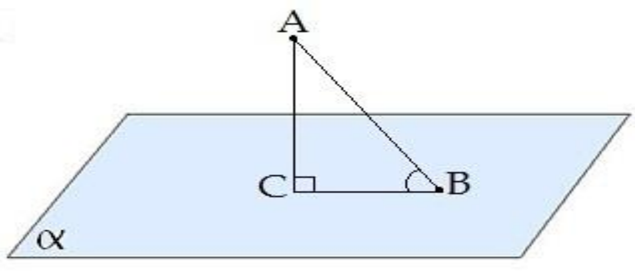


Рисунок 2.27 – $\sphericalangle CBA$ - угол между наклонной *AB* и плоскостью α.

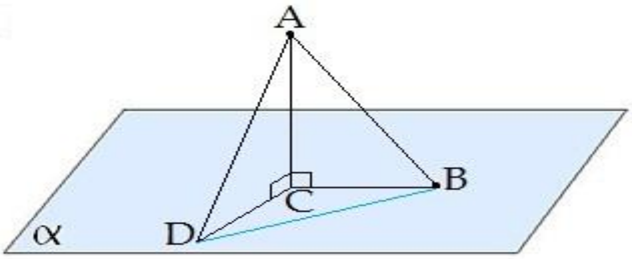


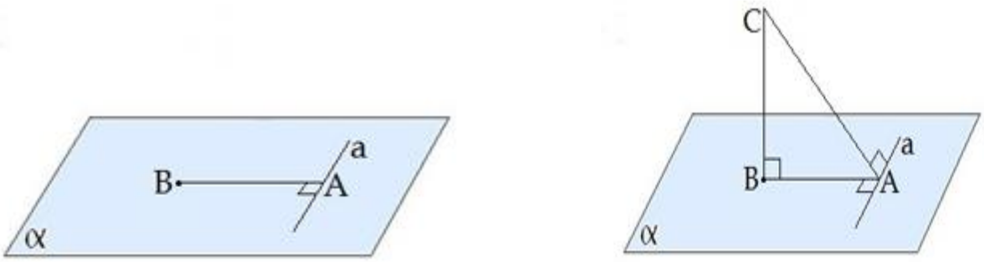
Рисунок 2.28 – Если $AD>AB$, то $DC>BC$

Замечание. Если из данной точки к данной плоскости провести несколько наклонных, то большей наклонной соответствует большая проекция.

$\sphericalangle DAB$ - угол между наклонными, $\sphericalangle DCB$ - угол между проекциями. Отрезок DB - расстояние между основаниями наклонных.

Теорема. «Теорема о трёх перпендикулярах»

Если прямая, проведенная на плоскости через основание наклонной, перпендикулярна ее проекции, то она перпендикулярна и самой наклонной.



$a \perp AB$ $\qquad$ $a \perp AB,\ BC \perp BA\} \Rightarrow a \perp CA$

Рисунок 2.29 – Теорема о тех перпендикулярах

Справедлива также **обратная теорема:**

Если прямая на плоскости перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна и проекции наклонной.

$a \perp AC$ $\qquad$ $a \perp AC,\ BC \perp BA\} \Rightarrow a \perp BA$

Рисунок 2.30 – Обратная теорема о тех перпендикулярах

3.Угол между прямой и плоскостью

Определение. Углом между прямой и плоскостью, пересекающей эту прямую и не перпендикулярной ей, называется угол между прямой и её проекцией на эту плоскость.

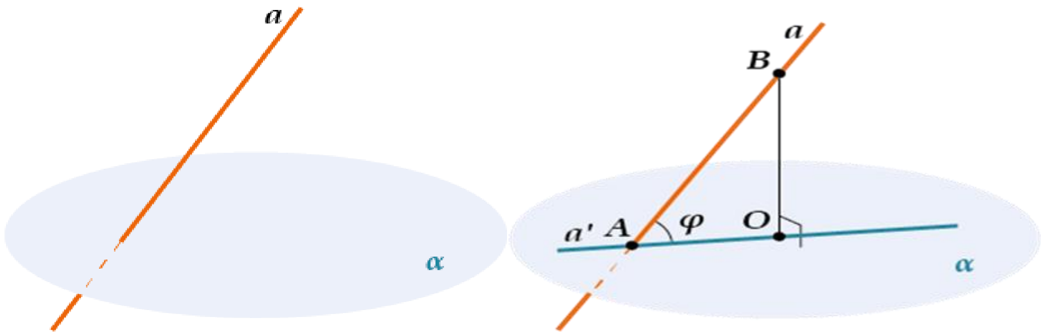


Рисунок 2.31 – Угол между прямой и плоскостью

В соответствии с приведенным определением, чтобы построить угол между прямой a и плоскостью α, нужно опустить перпендикуляр BO из любой точки прямой на плоскость α, а потом провести прямую через точки A и O. Эта прямая a' называется проекцией прямой a на плоскость α. Угол между прямой a и плоскостью α (по определению) равен углу φ между a и a'.

Вопросы для самоконтроля:

1. Дайте определение перпендикулярным прямым в пространстве.

2. Какая прямая называется перпендикулярной к плоскости?

3. Сформулируйте признак перпендикулярности прямой и плоскости.

4. Что называется перпендикуляром к плоскости?

5. Как определяется расстояние от точки до плоскости?

6. Что называется наклонной к плоскости?

7. Как определяется проекция наклонной?

8. Сформулируйте прямую и обратную теоремы о свойствах наклонных.

9. Как понимается угол между пряой и плоскостью?

Литература:

[3] С. 34 – 40; [6] С. 72 – 83; [12] – [21].

Лекция 7. Двугранный угол. Угол между плоскостями. Перпендикулярность двух плоскостей.

Геометрические преобразования пространства: параллельный перенос, симметрия относительно плоскости. Параллельное проектирование. Площадь ортогональной проекции. Изображение пространственных фигур

1. Двугранный угол

Углом на плоскости мы называем фигуру, образованную двумя лучами, исходящими из одной точки. В стереометрии наряду с такими углами рассматривается еще один вид углов – двугранные углы.

Определение. Двугранный угол – это часть пространства, заключённая между двумя полуплоскостями, имеющими одну общую границу.

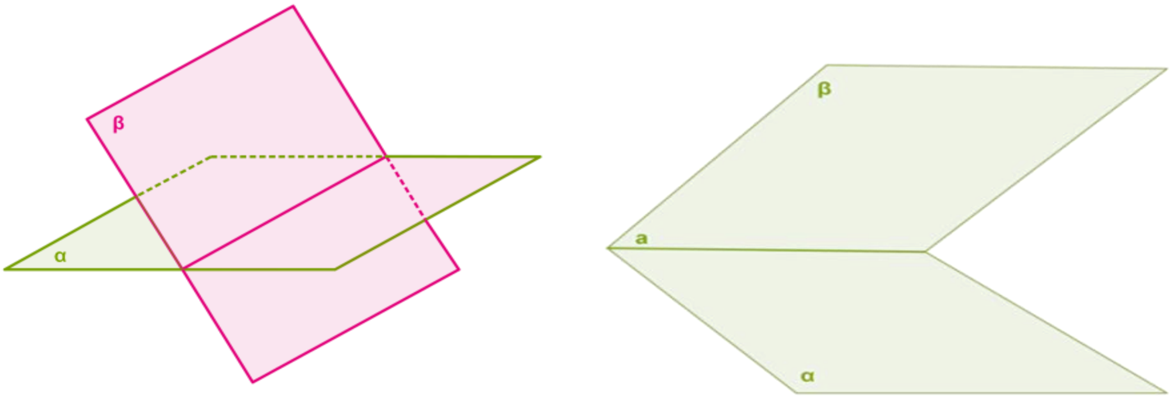


Рисунок 2.32 – Двугранный угол

Полуплоскости α и β, образующие двугранный угол, называются его **гранями**.

У двугранного угла две грани, отсюда и название – двугранный угол.

Прямая a, общая граница полуплоскостей, называется **ребром** двугранного угла.

Если в пространстве пересекаются две плоскости, получаются четыре двугранных угла (аналогично как при пересечении двух прямых получаются четыре угла). Рассмотрим один из них.

Выберем на ребре a двугранного угла произвольную точку C и проведём две пересекающиеся прямые $AC \perp a$ и $BC \perp a$, а через эти прямые плоскость γ перпендикулярно ребру a.

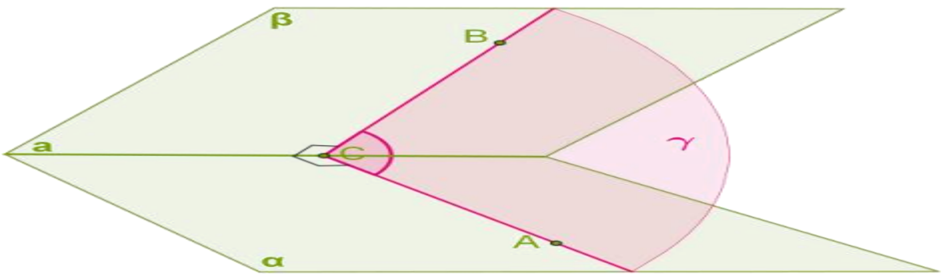


Рисунок 2.33 – Линейный угол двугранного угла

Линии пересечения AC и BC полуплоскостей α и β с плоскостью γ образуют некоторый угол $\measuredangle ACB$. Этот угол называется **линейным углом** двугранного угла. Величина линейного угла не зависит от выбора точки C на ребре a. Очевидно, двугранный угол имеет бесконечное множество линейных углов.

Все линейные углы двугранного угла равны друг другу.

Определение. Градусной мерой двугранного угла называется градусная мера его линейного угла. Величина двугранного угла $0° < \measuredangle ACB < 180°$.

2. Угол между плоскостями

Две пересекающиеся плоскости образуют четыре двугранных угла с общим ребром. Если один из этих углов равен φ, то остальные три угла равны соответственно $180° - \varphi$, φ, $180° - \varphi$. Если φ – тот из четырех углов, который не превосходит каждого из остальных, то говорят, что **угол между пересекающимися плоскостями** равен φ. Очевидно, $0° < \varphi < 90°$.

Если плоскости параллельны, то угол между ними равен 0° по определению.

Если при пересечении плоскостей один из двугранных углов 90°, то три остальные углы тоже 90°. Эти плоскости называют **перпендикулярными**.

Примером взаимно перпендикулярных плоскостей служат плоскости стены и пола комнаты.

3. Перпендикулярность плоскостей

Следующие теоремы, которые здесь приведём без доказательств, могут пригодится при решении задач.

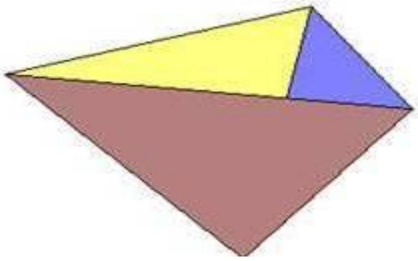
1. **«Признак перпендикулярности двух плоскостей».** Если одна из двух плоскостей проходит через прямую перпендикулярную к другой плоскости, то такие плоскости перпендикулярны.

2. Плоскость, перпендикулярная прямой, по которой пересекаются две плоскости, перпендикулярна каждой из этих плоскостей.

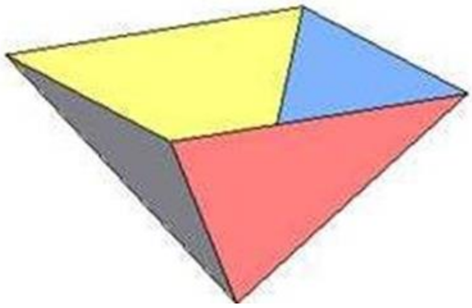
3. Если две плоскости перпендикулярны и в одной из них проведена прямая перпендикулярно линии пересечения плоскостей, то эта прямая перпендикулярна второй плоскости.

Замечание. Многогранные углы.

Представим несколько лучей в пространстве с общим началом. Их можно представить тоже как часть линий пересечения плоскостей – трёх, четырёх или больше и назвать рёбрами многогранного угла (рис. 2.34).



а) трёхгранный угол



б) четырёхгранный угол

Рисунок 2.34 – Многогранные углы

Каждые два луча образуют угол, который называют **плоским углом** многогранного угла.

Каждый плоский угол трёхгранного угла меньше суммы двух других плоских углов.

Сумма плоских углов многогранного угла меньше 360°.

4. Геометрические преобразования пространства: параллельный перенос, симметрия относительно плоскости. Параллельное проектирование. Площадь ортогональной проекции. Изображение пространственных фигур

Движения в пространстве

Движение в пространстве определяется так же, как и на плоскости.

Определение. Движением называется преобразование, при котором сохраняются расстояния между точками.

Под движением пространства понимается отображение пространства на себя, при котором любые две точки A и B переходят (отображаются) в некие точки A_1 и B_1 так, что $|AB|=|A_1B_1|$.

Иными словами, движение пространства — это отображение пространства на себя, сохраняющее расстояния между точками. Так же, как и для движения на плоскости, доказывается, что при движении в пространстве:

- прямые переходят в прямые;
- полупрямые — в полупрямые;
- отрезки — в отрезки;
- сохраняются углы между прямыми.

Новым свойством движения в пространстве является то, что движение переводит плоскости в плоскости.

В пространстве, также как и на плоскости, две фигуры называются **равными**, если они совмещаются движением.

Виды движения в пространстве

1. Центральная симметрия (симметрия относительно точки):

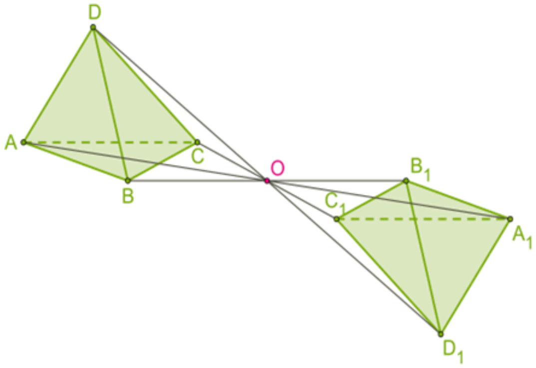


Рисунок 2.35 – Центральная симметрия

2. Осевая симметрия (симметрия относительно прямой):

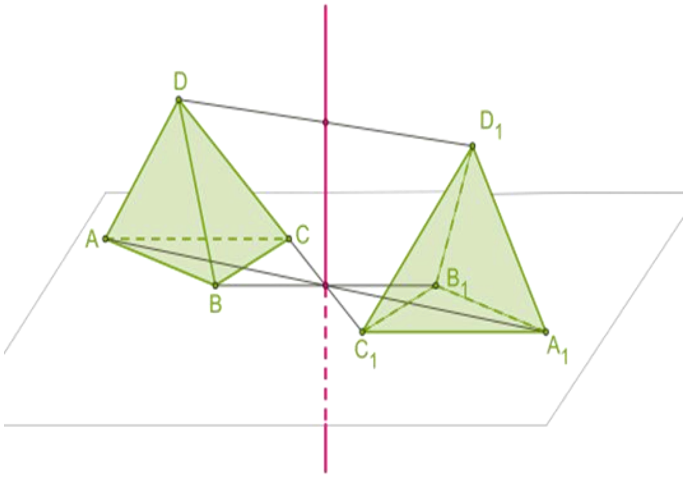


Рисунок 2.36 – Осевая симметрия

3. Зеркальная симметрия (симметрия относительно плоскости):

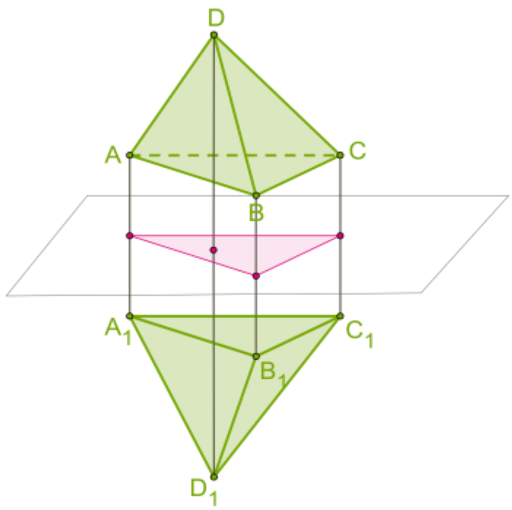


Рисунок 2.37 – Зеркальная симметрия

5. Параллельный перенос (точки переносятся на данный вектор):

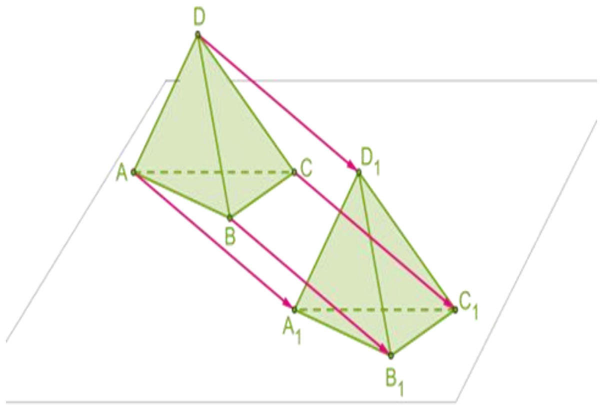


Рисунок 2.38 – Параллельный перенос

5. Поворот на данный угол вокруг данной точки:

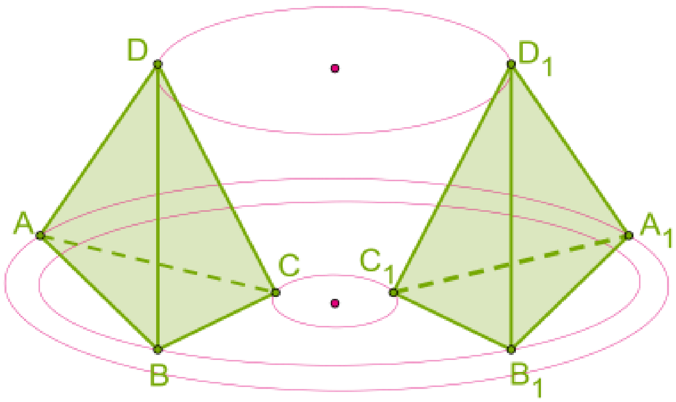


Рисунок 2.39 – Поворот

Параллельное проектирование

Пусть даны плоскость α и прямая l, пересекающая плоскость a. Возьмем произвольную точку пространства A_1 и проведем через эту точку прямую l_1, параллельную l. Прямая l_1 пересечет плоскость α в некоторой точке A. Полученная таким образом точка A называется проекцией точки A на плоскость α при проектировании параллельно прямой l. Обычно кратко говорят, что точка A есть параллельная проекция точки A_1.

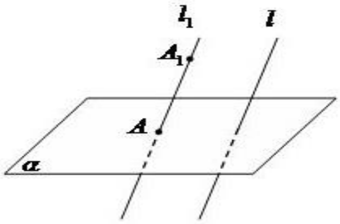


Рисунок 2.40 – Параллельное проектирование

Определение. Параллельной проекцией пространственной фигуры Φ_1 называется множество Ф параллельных проекций всех точек данной фигуры.

Свойства параллельного проектирования

1) Проекция прямой есть прямая.

2) Проекции параллельных прямых параллельны.

3) Отношение проекций двух параллельных отрезков равно отношению проектируемых отрезков.

Ортогональное проектирование

Частным случаем параллельного проектирования является ортогональное проектирование.

Пусть даны плоскость α и прямая l, перпендикулярная α. Возьмем произвольную точку пространства A_1 и проведем через нее прямую l_1 параллельную l (и, следовательно, перпендикулярную плоскости α). Прямая l_1 пересечет плоскость α в некоторой точке A.

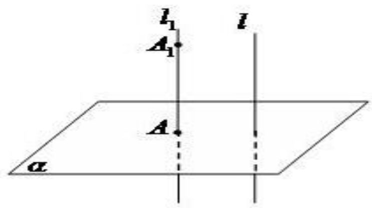


Рисунок 2.41 – Ортогональное проектирование

Полученная точка A называется **ортогональной проекцией** точки A_1 на плоскость α.

Определение. Ортогональной проекцией фигуры Φ_1 на плоскость α называется множество Φ ортогональных проекций всех точек данной фигуры Φ_1. Как частный случай параллельного проектирования, ортогональное проектирование обладает всеми свойствами параллельного проектирования.

Свойство ортогональной проекции плоского многоугольника

Площадь s ортогональной проекции плоского многоугольника на плоскость α равна площади S проектируемого многоугольника, умноженной на косинус угла γ между плоскостью многоугольника и плоскостью α:

$s=S\cdot\cos(\gamma)$.

Изображение пространственных фигур на плоскости

Для изображения пространственных фигур на плоскости обычно пользуются параллельным проектированием.

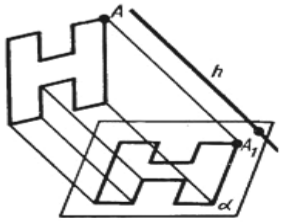


Рисунок 2.42 – Изображение пространственных фигур на плоскости

Прямолинейные отрезки фигуры изображаются на плоскости чертежа отрезками.

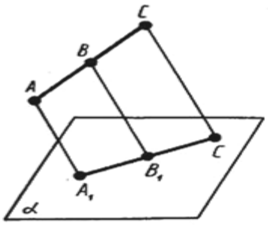


Рисунок 2.43 – Изображение отрезка на плоскости

Действительно, все прямые, проектирующие точки отрезка AC, лежат в одной плоскости, пересекающей плоскость a по прямой A_1C_1. Произвольная точка B отрезка AC изображается точкой B_1 отрезка A_1C_1.

Отношение отрезков одной прямой или параллельных прямых сохраняется при параллельном проектировании: $\frac{AB}{BC}=\frac{A_1B_1}{B_1C_1}$.

При изображении пространственных фигур необходимо соблюдать следующие ***требования.***

Изображение должно быть наглядным. Пирамиду и призму надо изображать так, чтобы наибольшее число их граней были видимыми, чтобы не сливались рёбра.

Изображение должно быть простым, т.е. не должно содержать каких-либо построений, не имеющих прямого отношения к решению задачи. Видимые линии должны иметь наибольшую толщину, невидимые – изображать штриховыми линиями.

Выполнение чертежа призмы удобно начинать с верхнего основания, т.к. в верхнем основании все линии видимые, боковые рёбра изображаются в виде параллельных и равных отрезков.

Вопросы для самоконтроля:

1. Что называется двугранным углом?
2. Что называется линейным углом двугранного угла?
3. Дайте определение углу между плоскостями.
4. Сформулируйте признак перпендикулярности плоскостей.

5. Перечислите геометриеские преобразования пространства.
6. Какие бывают виды движения?
7. Что называется параллельной проекцией?
8. Перечислите свойства параллельного проектирования.
9. Что является параллельной проекцией отрезка, треугольника, прямоугольника, квадрата, окружности?
10. Какие величины не изменяются при параллельном проецировании? (длина отрезка, градусная мера углов, отношения длин отрезков, отношение площадей двух фигур)?
11. Может ли при параллельном проецировании параллелограмма получиться трапеция и наоборот?
12. Что называется ортогональной проекцией фигуры?

Литература:

[3] С. 40-50, С. 220-224; [6] С. 43-48, С. 89-99, С. 146-150; [12] – [21].

2.5 Тема 5 Координаты и векторы

Лекция 8. Векторы. Модуль вектора. Равенство векторов. Сложение векторов. Умножение вектора на число. Разложение вектора по направлениям. Проекция вектора на ось. Координаты вектора

1.Понятие вектора в пространстве

Основные понятия для векторов в пространстве вводятся так же, как и для векторов на плоскости.

Величины, которые полностью определяются своими численными значениями, называются **скалярными**. Примерами скалярных величин являются: площадь, длина, объем, температура, работа, масса.

Другие величины, например, сила, скорость, ускорение, определяются не только своим числовым значением, но и направлением. Такие величины называются **векторными**. Векторная величина геометрически изображается с помощью вектора.

Определение. Вектор – это направленный отрезок, т.е. отрезок, имеющий определенную длину и определенное направление.

Если A –начало вектора, а B – его конец, то вектор обозначается символом $\overrightarrow{AB}$ или $\vec{a}$. Вектор $\overrightarrow{BA}$ (у него начало в точке B, а конец в точке A) называется **противоположным** вектору $\overrightarrow{AB}$. Вектор, противоположный вектору $\vec{a}$, обозначается $-\vec{a}$.

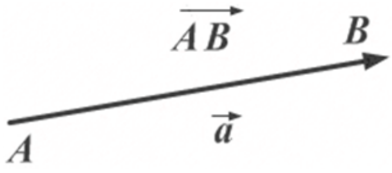


Рисунок 2.44 – Обозначение вектора

Любая точка пространства может рассматриваться как, начало и конец которого совпадают. Такой вектор называется *нулевым*. Нулевой вектор обозначают $\vec{0}$ **.**

Вектор, длина которого равна единице, называется **единичным** вектором и обозначается $\vec{e}$. Единичный вектор называю **ортом**.

2. Модуль вектора. Равенство векторов

Длина отрезка *AB* называется **длиной** или **модулем вектора** $\overrightarrow{AB}$ и обозначается $\left|\overrightarrow{AB}\right|$, $|\vec{a}|$.

Длина нулевого вектора равна нулю.

Определение. Два вектора называются **равными**, если они параллельны, направлены в одну сторону и имеют одинаковые длины.

Из определения равенства двух векторов вытекает, что вектор $\vec{a}$ не изменится, если его перенести параллельно самому себе, выбрав в качестве начала вектора любую точку пространства. Такой вектор $\vec{a}$ принято называть **свободным**.

Определение. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, лежащие на одной прямой или параллельные одной и той же прямой называются **коллинеарными**. Нулевой вектор коллинеарен любому вектору.

Определение. Векторы, лежащие в одной плоскости или в параллельных плоскостях, называются **компланарными**.

3. Линейные операции над векторами (сложение векторов; умножение вектора на число)

Определение. Суммой двух векторов $\vec{a}+\vec{b}$ называется вектор, который идет из начала вектора $\vec{a}$ в конец вектора $\vec{b}$ при условии, что вектор $\vec{b}$ приложен к концу вектора $\vec{a}$ **(правило треугольника).**

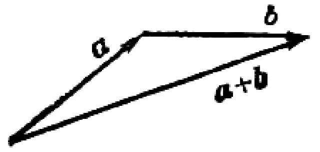


Рисунок 2.45 – Правило треугольника

Наряду с правилом треугольника часто пользуются (равносильным ему) **правилом параллелограмма**: если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ приведены к общему началу и на них построен параллелограмм, то сумма $\vec{a}+\vec{b}$ есть вектор, совпадающий с диагональю этого параллелограмма, идущей из общего начала $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Отсюда сразу следует, что $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.

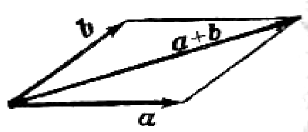


Рисунок 2.46 – Правило параллелограмма

Сложение многих векторов производится при помощи последовательного применения правила треугольника, которое называют **правилом многоугольника**.

Построим сумму четырех векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$.

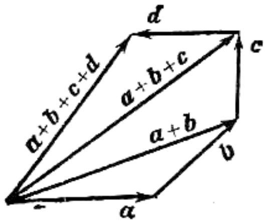


Рисунок 2.47 – Правило многоугольника

Три вектора в пространстве можно складывать по **правилу параллелепипеда**: если на трех векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, как на ребрах, построить параллелепипед, то его диагональ, выходящая из общего начала данных векторов, и будет их суммой: $\vec{d}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

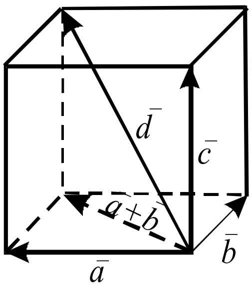


Рисунок 2.48 – Правило параллелепипеда

Определение. Разностью двух векторов $\vec{a}-\vec{b}$ называется вектор, который в сумме с вектором $\vec{b}$ составляет вектор $\vec{a}$. Если два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ приведены к общему началу, то разность их есть вектор, идущий из конца $\vec{b}$ («вычитаемого») к концу $\vec{a}$ («уменьшаемого»).

В параллелограмме, построенном на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, одна направленная диагональ является суммой векторов, а другая разностью.

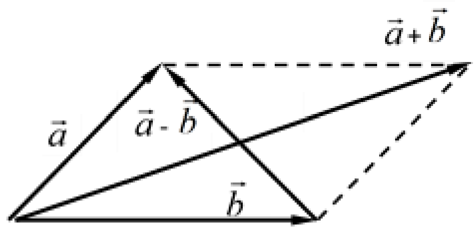


Рисунок 2.49 – Разность векторов

Можно вычитать векторы по правилу: $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$, т.е. вычитание векторов заменить сложением вектора $\vec{a}$ с вектором, противоположным вектору $\vec{b}$.

Определение. Произведением вектора $\vec{a}$ на скаляр (число) λ называется вектор $\lambda\cdot\vec{a}$ (или $\vec{a}\cdot\lambda$), который имеет длину $|\lambda|\cdot|\vec{a}|$, коллинеарен вектору $\vec{a}$, имеет направление вектора $\vec{a}$, если λ>0 и противоположное направление, если λ<0.

Если $k=0$, для любого вектора $\vec{a}$ произведение $k\vec{a}$ равно нуль-вектору: $0\cdot\vec{a}=\vec{0}$.

Если $k=1$, то $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$.

Если $k=-1$, то $-1\cdot\vec{a}=-\vec{a}$ – вектор, противоположный вектору $\vec{a}$.

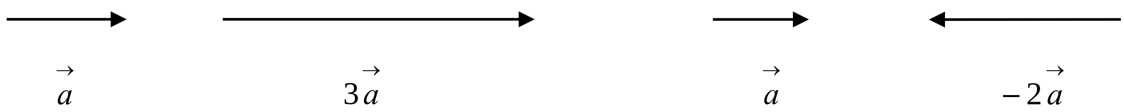


Рисунок 2.50 – Умножение вектора на число

Линейные операции над векторами обладают следующими свойствами:

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$,
2. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$,
3. $\lambda_1\cdot(\lambda_2\cdot\vec{a})=\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\vec{a}$,
4. $(\lambda_1+\lambda_2)\cdot\vec{a}=\lambda_1\cdot\vec{a}+\lambda_2\cdot\vec{a}$,
5. $\lambda\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\cdot\vec{a}+\lambda\cdot\vec{b}$.

Эти свойства позволяют производить преобразования в линейных операциях с векторами, так как это делается в обычной алгебре.

4. Проекция вектора на ось

Определение. Проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось l называется число, равное длине вектора $\overrightarrow{A_1B_1}$, взятой со знаком «+», если направление вектора $\overrightarrow{A_1B_1}$ совпадает с направлением оси l и со знаком «-» в противном случае (рис. 2.51).

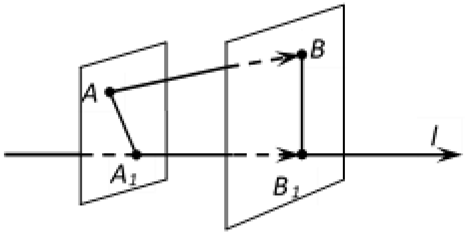


Рисунок 2.51 – Проекция вектора на ось

Точки A_1, B_1 – это точки пересечения оси l с перпендикулярными к ней плоскостями, проходящими через точки A и B.

Проекция вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось l обозначается так: $пр_l\overrightarrow{AB}$. Если $\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ или $\overrightarrow{AB}\perp l$, то $пр_l\overrightarrow{AB}=0$.

Определение. Углом между вектором и осью l называется угол φ между вектором $\vec{a}$ и и его проекцией на эту ось (рис. 2.52). Очевидно, $0\le \varphi \le \pi$.

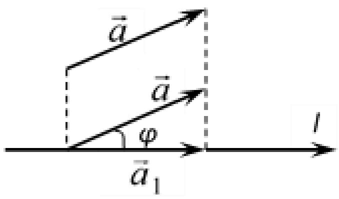


Рисунок 2.52 –Угол между вектором и осью

Свойства проекций

1. Проекция вектора $\vec{a}$ на ось l равна произведению модуля вектора $\vec{a}$ на косинус угла φ между вектором и осью, т.е. $пр_l\vec{a}=|\vec{a}|\cdot\cos\varphi$.

2. Проекция суммы нескольких векторов на одну и ту же ось равна сумме их проекций на эту ось. Если $\vec{d}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, то $пр_l\vec{d}=пр_l(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=пр_l\vec{a}+пр_l\vec{b}+пр_l\vec{c}$.

3. При умножении вектора $\vec{a}$ на число λ его проекция на ось также умножается на это число, т.е. $пр_l(\lambda\cdot\vec{a})=\lambda\cdot пр_l\vec{a}$.

Таким образом, линейные операции над векторами приводят к соответствующим линейным операциям над проекциями этих векторов.

5. Разложение вектора по направлениям

Рассмотрим три некомпланарных вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, совпадающие с векторами $\overrightarrow{AA_2}, \overrightarrow{AA_3}, \overrightarrow{AA_4}$, исходящими из вершины *A* параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 2.53).

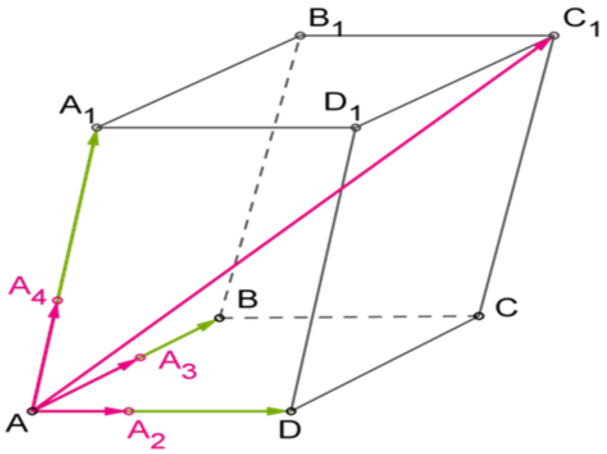


Рисунок 2.53 – Разложение вектора по направлениям

Рассмотрим векторы $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA_1}$, направленные вдоль ребер параллелепипеда. Выразим диагональ параллелограмма – вектор $\overrightarrow{AC_1} = \vec{d}$ через векторы $\overrightarrow{AA_2}, \overrightarrow{AA_3}, \overrightarrow{AA_4}$. По правилу сложения векторов в пространстве, диагональ AC_1 может быть представлена в виде суммы: $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$. В свою очередь, каждый из векторов-слагаемых можно выразить через векторы $\overrightarrow{AA_2}, \overrightarrow{AA_3}, \overrightarrow{AA_4}$, умножив каждый из них на соответствующий числовой множитель: α, β, γ. Таким образом, получим: $\overrightarrow{AC_1} = \alpha\,\overrightarrow{AA_2} + \beta\,\overrightarrow{AA_3} + \gamma\overrightarrow{AA_4}$ или $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$.

Полученное векторное равенство называется **разложением вектора $\vec{d}$ по векторам $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$**.

Числа α, β, γ называются **коэффициентами разложения** или **координатами** вектора $\vec{d}$ в базисе $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Координаты вектора определяются единственным образом.

Вопросы для самоконтроля:

1. Что такое вектор?

2. Какие векторы называются равными, противоположными, коллинеарными?

3. Сформулируйте правило треугольника для сложения векторов.

4. Сформулируйте правило параллелограмма для сложения векторов.

5. Как сложить несколько векторов?

5. Сформулируйте правило разности векторов.

6. Сформулируйте правило умножения вектора на число.

7. Как определяется проекция вектора на ось?

8. Какое выражение называется разложением вектора по координатам?

9. Что такое координаты вектора?

Литература:

[3] С. 84-93; [6] С. 139-142; [12] – [21].

Лекция 9. Прямоугольная (декартова) система координат в пространстве. Формула расстояния между двумя точками. Скалярное произведение векторов. Угол между двумя векторами. Уравнения сферы, плоскости и прямой

1. Прямоугольная (декартова) система координат в пространстве

Три попарно перпендикулярные прямые с выбранными направлениями и единицей измерения образуют **систему координат** в пространстве. Точка пересечения всех прямых является началом системы координат.

Оси координат Ox, Oy и Oz называются соответственно: Ox — ось абсцисс, Oy — ось ординат, Oz — ось аппликат (рис.2.54).

Через две пересекающиеся прямые можно провести плоскость. Получаем три координатные плоскости: (Oxy), (Oyz) и (Oxz) (рис. 2.55).

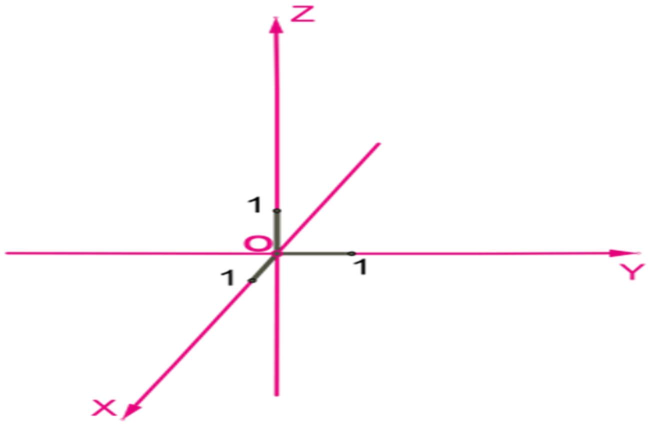


Рисунок 2.54 – Система координат в пространстве

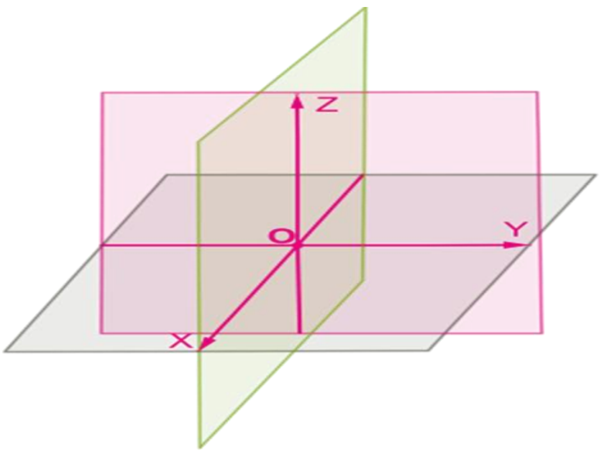


Рисунок 2.55 – Координатные плоскости в пространстве

2. Координаты точки

Положение точки A в пространстве определяется тремя координатами: x, y и z.

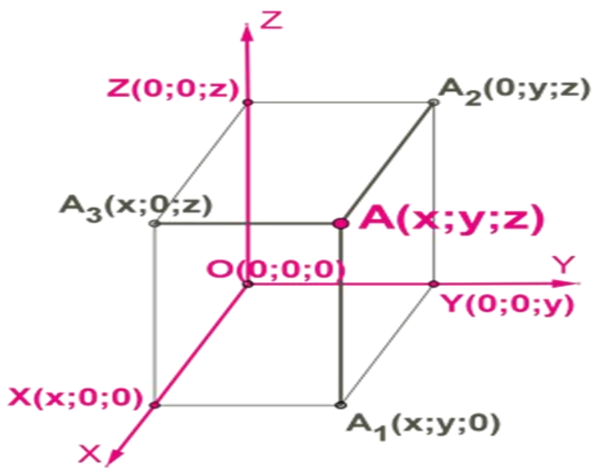


Рисунок 2.56 – Коодинаты точки в пространстве

Координата x называется абсциссой точки A, координата y — ординатой точки A, координата z — аппликатой точки A. Записывают так: $A(x;y;z)$.

Если точка находится на оси Ox, то её координаты $X(x;0;0)$.

Если точка находится на оси Oy, то её координаты $Y(0;y;0)$.

Если точка находится на оси Oz, то её координаты $Z(0;0;z)$.

Если точка находится в плоскости Oxy, то её координаты $A_1(x;y;0)$.

Если точка находится в плоскости Oyz, то её координаты $A_2(0;y;z)$.

Если точка находится в плоскости Oxz, то её координаты $A_3(x;0;z)$.

Приведем пример построения точки $B(4;3;5)$ в прямоугольной системе координат (рис. 2.57).

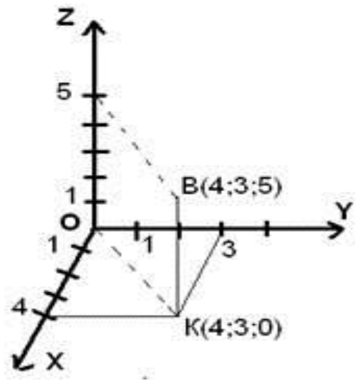


Рисунок 2.57 – Построение точки B в пространстве

Первая координата точки B – 4, поэтому откладываем на Ox 4, проводим прямую параллельно оси Oy до пересечения с прямой, проходящей через прямую $y=3$. Таким образом, мы получаем точку K. Эта точка лежит в плоскости Oxy и имеет координаты $K(4;3;0)$. Теперь нужно провести прямую параллельно оси Oz. И прямую, которая проходит через точку с аппликатой 5 и параллельна диагонали параллелограмма в плоскости Oxy. На их пересечении мы получим искомую точку B.

3. Координаты вектора

Рассмотрим в пространстве прямоугольную систему координат $Oxyz$. Выделим на координатных осях Ox, Oy, Oz единичные векторы (орты), обозначаемые соответственно $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Выберем произвольный вектор $\vec{a}$ пространства и совместим его начало с началом координат: $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$ (рис. 2.58).

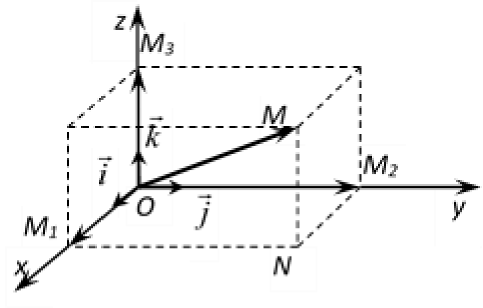


Рисунок 2.58 – Координаты вектора в пространстве

Найдем проекции вектора $\vec{a}$ на координатные оси. Проведем через конец вектора $\overrightarrow{OM}$ плоскости, параллельные координатным плоскостям. Точки пересечения этих плоскостей с осями обозначим соответственно через M_1, M_2 и M_3. Получим прямоугольный параллелепипед, одной из диагоналей которого является вектор $\overrightarrow{OM}$. Тогда, $\text{пр}_x\vec{a} = \left|\overrightarrow{OM_1}\right|$, $\text{пр}_y\vec{a} = \left|\overrightarrow{OM_2}\right|$, $\text{пр}_z\vec{a} = \left|\overrightarrow{OM_3}\right|$. По определению суммы нескольких векторов находим $\vec{a} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1N} + \overrightarrow{NM}$. А так как $\overrightarrow{M_1N} = \overrightarrow{OM_2}$, $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{OM_3}$, то $\vec{a} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3}$. Но $\overrightarrow{OM_1} = \left|\overrightarrow{OM_1}\right| \cdot \vec{i}$, $\overrightarrow{OM_2} = \left|\overrightarrow{OM_2}\right| \cdot \vec{j}$, $\overrightarrow{OM_3} = \left|\overrightarrow{OM_3}\right| \cdot \vec{k}$. Обозначим проекции вектора $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$ на оси Ox, Oy и Oz соответственно через a_x, a_y и a_z ,т.е. $\left|\overrightarrow{OM_1}\right| = a_x$, $\left|\overrightarrow{OM_2}\right| = a_y$, $\left|\overrightarrow{OM_3}\right| = a_z$.

Тогда получаем: $\vec{a} = \left|\overrightarrow{OM_1}\right| \cdot \vec{i} + \left|\overrightarrow{OM_2}\right| \cdot \vec{j} + \left|\overrightarrow{OM_3}\right| \cdot \vec{k} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$.

Формула $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$ является основной в векторном исчислении и называется **разложением вектора по ортам координатных осей**. Числа a_x, a_y и a_z называются **координатами** вектора, т.е. координаты вектора есть его проекции на соответствующие координатные оси.

Вычисление длины вектора по его координатам

Пусть нам дан вектор $\vec{a}$ своими координатами $\vec{a}\{a_x; a_y; a_z\}$. На основании теоремы о длине диагонали прямоугольного параллелепипеда $|\vec{a}|^2 = a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2$, отсюда $|\vec{a}| = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2}$.

Координаты вектора, если даны координаты его начала и конца

Если вектор задан координатами своего начала и конца – точками $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, то его координаты могут быть найдены следующим образом: $\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$, а длина $\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

4. Действия над векторами в координатной форме

Пусть даны векторы $\vec{a} = \{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{b} = \{x_2; y_2; z_2\}$

1. Если $\vec{a} = \vec{b}$, то $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, $z_1 = z_2$.

2. $\vec{a} + \vec{b} = \{x_1 + x_2;\ y_1 + y_2;\ z_1 + z_2\}$

3. $\vec{a} - \vec{b} = \{x_1 - x_2;\ y_1 - y_2;\ z_1 - z_2\}$

4. $k\vec{a} = \{kx_1; ky_1; kz_1\}$

Из определения вектора как направленного отрезка, который можно передвигать в пространстве параллельно самому себе, следует, что два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны тогда и только тогда, когда выполняется равенство их координат $a_x = b_x, a_y = b_y, a_z = b_z$.

Выясним **условия коллинеарности** векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, заданных своими координатами.

Так как $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то можно записать $\vec{a} = \lambda \vec{b}$, где λ – некоторое число. То есть $a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k} = \lambda(b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}) = \lambda b_x \cdot \vec{i} + \lambda b_y \cdot \vec{j} + \lambda b_z \cdot \vec{k}$.

Отсюда

$$a_x = \lambda b_x,\ a_y = \lambda b_y,\ a_z = \lambda b_z, \text{ т.е } \frac{a_x}{b_x} = \lambda,\ \frac{a_y}{b_y} = \lambda,\ \frac{a_z}{b_z} = \lambda \text{ или } \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$

Таким образом, проекции коллинеарных векторов пропорциональны. Верно и обратное утверждение: векторы, имеющие пропорциональные координаты, коллинеарны.

Примеры.

1. Вычислить координаты векторов $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}, \vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$, если $\vec{a} = \{-3;5;1\}$, $\vec{b} = \{4;-2;8\}$.

Решение: по формулам сложения и вычитания векторов в координатной форме, имеем $\vec{c} = \{-3+4;5+(-2);1+8\} = \{1;3;9\}$, $\vec{d} = \{-3-4;5-(-2);1-8\} = \{-7;7;-7\}$.

2. По координатам векторов $\vec{a}(-4;6;0)$, $\vec{b}(1;-1;7)$ найти координаты вектора $3\vec{b} - \frac{\vec{a}}{2}$.

Решение: $3\vec{b} - \frac{\vec{a}}{2} = \left\{3 \cdot 1 - \frac{-4}{2}; 3 \cdot (-1) - \frac{6}{2}; 3 \cdot 7 - \frac{0}{2}\right\} = \{5; -6; 21\}$.

5. Формула расстояния между двумя точками

Пусть $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$— две точки в пространстве. Тогда, расстояние d между ними может быть найдено как длина вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ по формуле: $d = \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Используя формулу расстояния между двумя точками, легко можно получить уравнение сферы в пространстве.

6. Уравнение сферы

Найдем уравнение сферы радиуса *R* с центром в точке $C(x_0; y_0; z_0)$. Согласно определению сферы, расстояние любой ее точки $M(x; y; z)$ от центра $C(x_0; y_0; z_0)$ равно радиусу *R*, т.е. *CM*=*R*. Но *CM* – расстояние между точками *C* и *M*, значит, может быть вычислено по формуле $CM = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$. Следовательно, $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} = R$ или $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2$. Это и есть искомое уравнение сферы. Если центр сферы совпадает с началом координат, то уравнение принимает вид $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

7. Угол между векторами

Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ всегда образуют некоторый угол α.

Угол между векторами может принимать значения от 0° до 180° включительно.

Если векторы расположены на пересекающихся прямых, они могут образовывать:

1. Острый угол

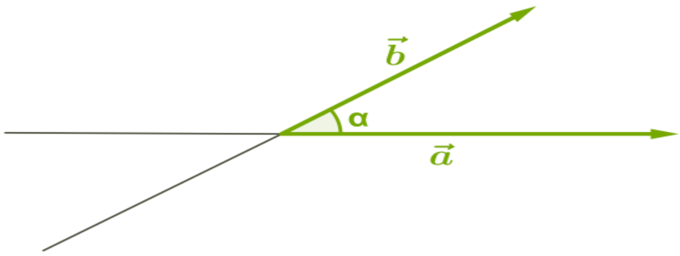


Рисунок 2.59 – Острый угол между векторами

2. Тупой угол

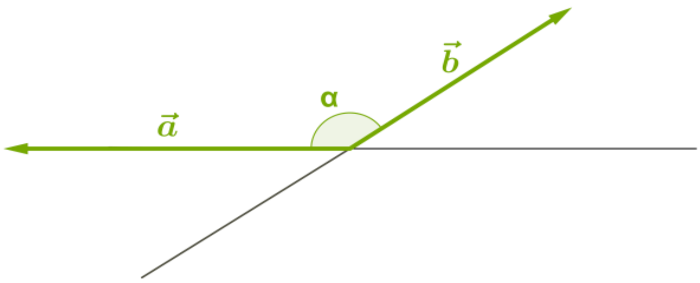


Рисунок 2.60 – Тупой угол между векторами

3. Прямой угол (векторы перпендикулярны)

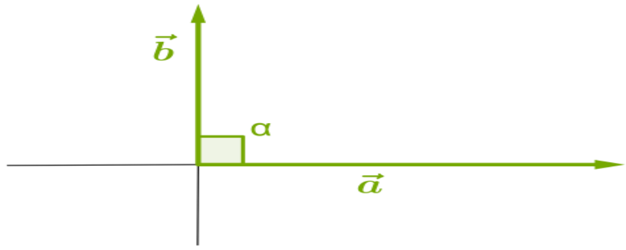


Рисунок 2.61 – Прямой угол между векторами

Если векторы расположены на параллельных прямых, то они могут образовывать:

4. Угол величиной 0° (векторы сонаправлены)

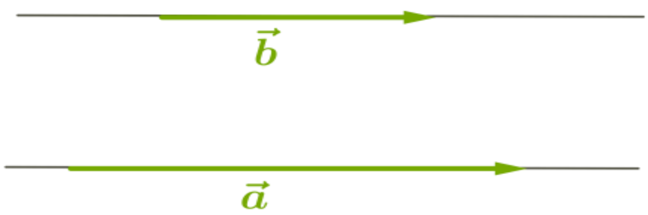


Рисунок 2.62 –Нулевой угол между векторами

5. Угол величиной 180° (векторы противоположно направлены)

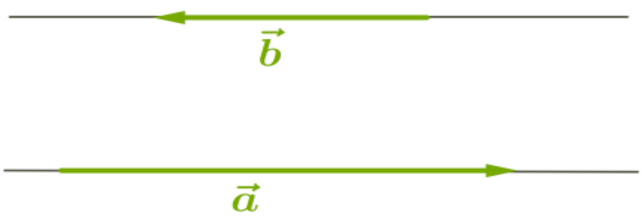


Рисунок 2.63 – Угол 180° между векторами

Если один из векторов или оба вектора нулевые, то угол между ними будет равен 0°.

Угол между векторами обозначают так: $(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \alpha$

8. Скалярное произведение векторов

Определение. Скалярным произведением двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

Обозначается $\vec{a}\vec{b}$, $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $(\vec{a},\vec{b})$. Итак, по определению $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$, где $\varphi = (\widehat{\vec{a},\vec{b}})$.

Результат скалярного произведения векторов является числом (в отличие от результата рассмотренных ранее действий с векторами — сложения, вычитания и умножения на число. В таких случаях результатом был вектор), так как длины векторов — это числа, косинус угла — число, соответственно, их произведение также будет являться числом.

1. Если угол между векторами острый, то скалярное произведение будет положительным числом (так как косинус острого угла — положительное число).

Если векторы сонаправлены, то угол между ними будет равен 0°, а косинус равен 1, скалярное произведение также будет положительным.

2. Если угол между векторами тупой, то скалярное произведение будет отрицательным (так как косинус тупого угла — отрицательное число).

Если векторы направлены противоположно, то угол между ними будет равен 180°. Скалярное произведение также отрицательно, так как косинус этого угла равен −1.

3. Если угол между векторами прямой, то скалярное произведение векторов равно нулю, так как косинус прямого угла равен 0.

Справедливы и обратные утверждения.

Свойства скалярного произведения

1. Скалярное произведение обладает переместительным свойством:

$$\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}.$$

2. Скалярное произведение обладает сочетательным свойством относительно скалярного множителя: $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = \lambda(\vec{a}\vec{b})$.

3. Скалярное произведение обладает распределительным свойством:

$$\vec{a}(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}.$$

4. Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины: $\vec{a}^{\,2} = |\vec{a}|^2$.

$$\vec{a}^{\,2} = \vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos 0 = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}| = |\vec{a}|^2.$$

В частности, $\vec{i}^{\,2} = \vec{j}^{\,2} = \vec{k}^{\,2} = 1$.

5. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (ненулевые) взаимно перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю, т.е. если $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $\vec{a}\vec{b} = 0$. Справедливо и обратное утверждение: если $\vec{a}\vec{b} = 0$ и $|\vec{a}| \neq 0, |\vec{b}| \neq 0$, то $\vec{a} \perp \vec{b}$.

В частности, $\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{i} = 0$.

Выражение скалярного произведения через координаты

Пусть заданы два вектора $\vec{a} = a_x\cdot\vec{i} + a_y\cdot\vec{j} + a_z\cdot\vec{k}$ и $\vec{b} = b_x\cdot\vec{i} + b_y\cdot\vec{j} + b_z\cdot\vec{k}$.

Найдем скалярное произведение векторов, перемножая их как многочлены (что законно в силу свойств линейности скалярного произведения) и пользуясь таблицей скалярного произведения векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$:

Таблица 2.3 – Скалярное произведение векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	1	0	0
$\vec{j}$	0	1	0
$\vec{k}$	0	0	1

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_x\cdot\vec{i} + a_y\cdot\vec{j} + a_z\cdot\vec{k})\cdot(b_x\cdot\vec{i} + b_y\cdot\vec{j} + b_z\cdot\vec{k}) =$$
$$= a_x b_x \vec{i}\cdot\vec{i} + a_x b_y \vec{i}\cdot\vec{j} + a_x b_z \vec{i}\cdot\vec{k} + a_y b_x \vec{j}\cdot\vec{i} + a_y b_y \vec{j}\cdot\vec{j} + a_y b_z \vec{j}\cdot\vec{k} +$$
$$+ a_z b_x \vec{k}\cdot\vec{i} + a_z b_y \vec{k}\cdot\vec{j} + a_z b_z \vec{k}\cdot\vec{k} = a_x b_x + 0 + 0 + 0 + a_y b_y + 0 + 0 + 0 + a_z b_z,$$

т.е. $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

Итак, скалярное произведение векторов равно сумме произведений их одноименных координат.

Нахождение угла между векторами с помощью скалярного произведения

Угол φ между ненулевыми векторам $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ и $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$ определяется по формуле: $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$, т.е. $\cos\varphi = \dfrac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$.

Отсюда следует **условие перпендикулярности** ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$.

9. Уравнения прямой и плоскости

9.1 Уравнение плоскости

Пусть в пространстве $Oxyz$ плоскость Q задана точкой $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и вектором $\vec{n} = \{A; B; C\}$, перпендикулярным этой плоскости. Выведем уравнение плоскости Q (рис. 2.64).

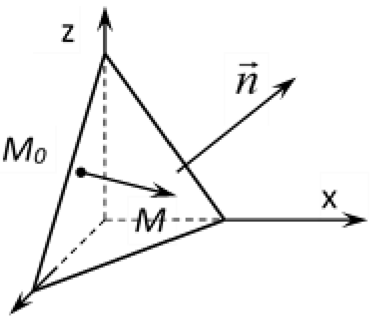


Рисунок 2.64 – Плоскость Q в пространстве

Возьмем на ней произвольную точку $M(x;y;z)$ и составим вектор $\overrightarrow{M_0M}=\{x-x_0;y-y_0;z-z_0\}$. При любом расположении точки M на плоскости Q векторы $\vec{n}$ и $\overrightarrow{M_0M}$ взаимно перпендикулярны, поэтому их скалярное произведение равно нулю: $\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0$, т.е. $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

Полученное уравнение первой степени относительно текущих координат *x, y* и *z* называется **уравнением плоскости**, проходящей через данную точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}=\{A;B;C\}$. Вектор $\vec{n}=\{A;B;C\}$ называется **нормальным вектором плоскости**.

Придавая коэффициентам *A, B* и *C* уравнения различные значения, можно получить уравнение любой плоскости, проходящей через точку M_0. Совокупность плоскостей, проходящих через данную точку, называется **связкой** плоскостей, а уравнение $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ – уравнением связки плоскостей.

Раскроем скобки в этом уравнении: $Ax-Ax_0+By-By_0+Cz-Cz_0=0$. Обозначим $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$, получим уравнение $Ax+By+Cz+D=0$. Уравнение $Ax+By+Cz+D=0$ называется **общим** уравнением плоскости.

Частные случаи общего уравнения плоскости:

1. Если $D=0$, то оно принимает вид $Ax+By+Cz=0$. Этому уравнению удовлетворяет точка $O(0;0;0)$. Следовательно, в этом случае плоскость проходит через начало координат .

2. Если *C=0*, то имеем уравнение $Ax+By+D=0$. Нормальный вектор $\vec{n}=\{A;B;0\}$ перпендикулярен оси *Oz*. Следовательно, плоскость параллельна оси *Oz*; если *B=0* –плоскость параллельна оси *Oy*; *A=0* – плоскость параллельна оси *Ox*.

3. Если *C=D=0*, то плоскость $Ax+By=0$проходит через ось *Oz*. Аналогично, уравнениям $By+Cz=0$ и $Ax+Cz=0$отвечают плоскости, проходящие, соответственно, через оси *Ox* и *Oy*.

4. Если *A=B=0*, то уравнение принимает вид $Cz+D=0$, плоскость параллельна плоскости *Oxy*. Аналогично, уравнениям $Ax+D=0$ и $By+D=0$отвечают плоскости, соответственно параллельные плоскостям *Oyz* и *Oxz*.

5. Если $A=B=D=0$, то уравнение плоскости примет вид $Cz=0$, т.е. $z=0$. Это уравнение плоскости Oxy. Аналогично: $y=0$ - уравнение плоскости Oxz; $x=0$ – уравнение плоскости Oyz.

9.2 Уравнения прямой в пространстве

Положение прямой в пространстве вполне определено, если задать какую-либо точку M_0 на прямой и вектор $\vec{S}$, параллельный этой прямой. Вектор $\vec{S}$ называется **направляющим вектором прямой**.

Пусть прямая задана точкой $M_0(x_0;y_0;z_0)$ и направляющим вектором $\vec{S}=\{m;n;p\}$ (рис. 2.65).

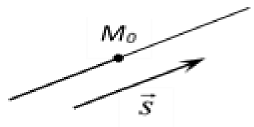


Рисунок 2.65 – Прямая в пространстве

Выберем на прямой произвольную точку $M(x;y;z)$ и составим вектор $\overrightarrow{M_0M}=\{x-x_0;y-y_0;z-z_0\}$. При любом расположении точки M на прямой векторы $\vec{S}$ и $\overrightarrow{M_0M}$ коллинеарны, поэтому ихкоординаты пропорциональны: $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$.

Уравнения $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$ называются **каноническими** уравнениями прямой в пространстве.

Обращение в нуль одного из знаменателей уравнений означает обращение в нуль соответствующего числителя.

Пример. Уравнения $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+4}{2}=\dfrac{z-1}{0}$ задают прямую, проходящую через точку $M(2;-4;1)$ перпендикулярно плоскости Oz (проекция вектора $\vec{S}=\{3;2;0\}$ на ось Oz равна нулю). Но это означает, что прямая лежит в плоскости $z=1$, и поэтому для всех точек прямой будет $z-1=0$.

Вопросы для самоконтроля:

1. Как определяется декартова система координат в пространстве?
2. Что называется координатами точки?
3. Что называется координатами вектора?
4. Как определить координаты вектора, если известны координаты его начала и конца?

5. Запишите разложение вектора по ортам координатных осей в декартовой системе координат.
6. Приведите формулу для нахождения длины вектора.
7. Приведите формулы для сложения, вычитания, умножения на число векторов в координатной форме.
8. Запишите формулы для вычисления скалярного произведения векторов.
9. Запишите формулу для вычисления угла между векторами.
10. Сформулируйте условие перпендикулярности двух векторов.
11. Какой вектор называется нормалью к плоскости?
12. Напишите уравнение плоскости в пространстве.
13. Какой вектор называется направляющим вектором прямой?
14. Напишите уравнения прямой в пространстве.

Литература:

[3] С. 102-107; [6] С. 144-190; [12] – [21].

2.6 Тема 6 Комбинаторика

Лекция 10. Основные понятия комбинаторики

1. Понятие комбинаторики

Комбинаторика — раздел математики о вычислении количества различных комбинаций каких-либо элементов.

В заданиях по комбинаторике обычно нужно выяснить, возможно ли составить комбинацию определённого вида и сколько различных комбинаций можно составить.

Например:

1. Сколько различных трёхзначных номеров телефона можно составить из пяти цифр?

2. Сколькими различными способами можно составить танцевальную пару, если в коллективе 3 мальчика и 4 девочки?

3. Сколькими различными способами можно образовать пару дежурных, если в классе остались Надя, Вика, Саша и Юра?

4. Сколькими различными способами можно выбрать двух учеников (одного - чистить доску, второго - подметать пол), если в классе остались Надя, Вика, Саша и Юра?

Один из способов решения задач комбинаторики — это рассмотреть все возможные комбинации элементов, что называется **полным перебором вариантов**.

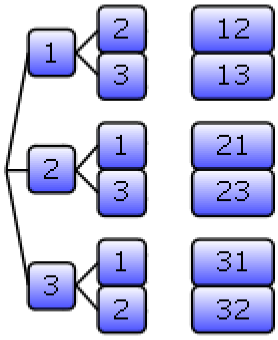
2. Древовидная диаграмма

С помощью древовидной диаграммы осуществляется полный перебор.

Пример. Сколько различных двузначных чисел можно составить из цифр 1, 2 и 3, если каждую использовать только один раз?

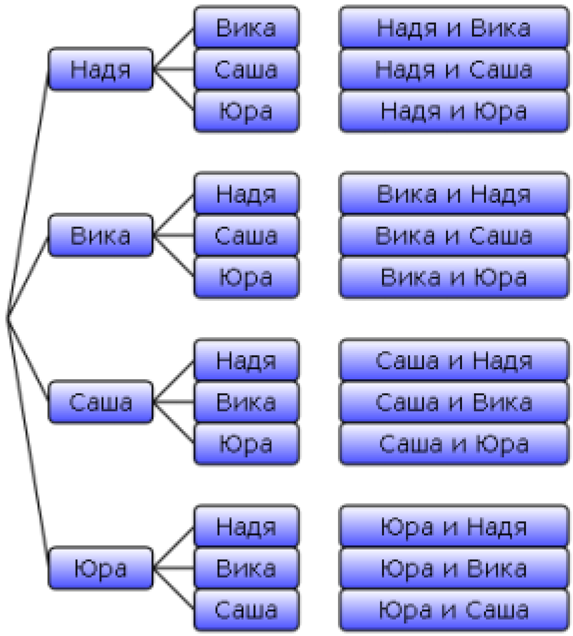
Решение:

Составляется древовидная диаграмма:



Ответ: можно составить 6 различных чисел.

Пример. Сколькими различными способами можно образовать пару дежурных, если в классе остались Надя, Вика, Саша и Юра?



На древовидной диаграмме видно, что можно образовать только 6 пар дежурных (Надя и Вика, Надя и Саша, Надя и Юра, Вика и Саша, Саша и Юра, Вика и Юра), т.к. каждая пара повторяется 2 раза.

Ответ: 6 пар дежурных.

Такого рода диаграммы в подробностях удобно рисовать только для сравнительно небольшого числа вариантов, а, например, для сотен комбинаций дерево вариантов целиком не нарисуешь. Тогда приходится действовать по-другому. Применяются так называемые **правила (законы) комбинаторики**.

3. Правила (законы) комбинаторики

3.1 Правило сложения в комбинаторике

Пример. В вазе лежит 5 яблок, 4 груши и 3 мандарина. Сколько существует возможностей взять один фрукт из вазы?

Решение: Если взять яблоко, то существует 5 возможностей, если взять грушу, то существует 4 возможности, если взять мандарин, то существует 3 возможности.

Значит, чтобы взять один фрукт из всех лежащих в вазе, существует 5+4+3=12 возможностей.

Этот пример можно обобщить **(закон сложения в комбинаторике)**:

«Допустим, что есть две группы: в одной k различных элементов, во второй n различных элементов. Если из первой группы какой-либо элемент можно выбрать k способами, а из второй группы n способами, то выбрать один элемент из первой или второй группы можно k+n способами».

Закон сложения используется тогда, когда нужно выбрать только 1 элемент. Закон сложения также используется, если нужно выбрать элемент из трёх, четырёх и т.д. групп.

Чтобы использовать закон сложения:

1) нужно понять, каковы группы, из которых нужно выбрать 1 элемент;

2) нужно выяснить количество элементов в каждой группе;

3) нужно убедиться, что в различных группах, из которых выбирают элемент, нет одинаковых элементов.

Часто правило сложения приводится немного в другой формулировке: «Если элемент A можно выбрать k способами, элемент B — n способами, то элемент «A или B» можно выбрать $k+n$ способами».

Замечание. При использовании закона сложения надо следить, чтобы ни один из способов выбора объекта A не совпадал с каким-либо способом выбора объекта B. Если такие совпадения есть, то закон сложения утрачивает силу, и мы получаем лишь $(k+n-m)$ способов выбора, где m — число совпадений.

Пример. В группе 7 человек имеют «5» по математике, 9 человек — «5» по философии. В сессии 2 экзамена. Известно, что 4 человека сдали сессию отлично. Сколько человек имеют хотя бы одну пятерку в сессии? Решение: 7+9−4=12.

3.2 Правило умножения в комбинаторике

Пример. Марина купила 3 кроликов: серого (с), белого (б) и рябого (р). Сколько существует различных способов посадить этих кроликов в 3 клетки, если в одной клетке может находится только 1 кролик?

Решение:

Первый вариант решения — схематический рисунок (табл. 2.4).

Таблица 2.4 – Схематический рисунок

1-я клетка	**2-я клетка**	**3-я клетка**	**Исходы (6 способов)**
серый (с)	белый	рябой	с, б, р
	рябой	белый	с, р, б
белый (б)	серый	рябой	б, с, р
	рябой	серый	б, р, с
рябой (р)	серый	белый	р, с, б
	белый	серый	р, б, с

Это задание можно решить по-другому, используя **закон умножения**.

«Если элемент A можно выбрать k способами и затем второй элемент B можно выбрать m различными способами, то пару элементов A и B можно выбрать k·m способами».

Закон выполняется также, если нужно выбирать по 1 элементу из трёх, четырёх и т.д. групп.

Второй вариант решения — используя закон умножения:

Чтобы посадить кролика в клетку, нужно выбрать пару — кролик и клетка.

В первую клетку можно посадить одного из 3 кроликов — 3 возможности.

Во вторую клетку можно посадить одного из 2 оставшихся кроликов — 2 возможности.

В третьей клетке остаётся последний кролик — 1 возможность.

Вместе $3·2·1=6$ (возможностей).

Ответ: кроликов можно распределить по клеткам 6 способами.

При составлении схемы важен цвет каждого кролика, а используя закон умножения, важно только количество кроликов и клеток.

Использование закона умножения упрощает и ускоряет решение задач.

Соединения в комбинаторике

Комбинаторика изучает три вида соединений (комбинаций) элементов какого-то множества: перестановки, размещения, сочетания. Их можно понимать как подмножества некоторого множества элементов **(выборки)**.

Упорядоченными выборками называются выборки, в которых **важен** порядок элементов, т.е. если в выборке поменяют местами два элемента, то получится другая выборка.

Например, из цифровых выборок упорядоченными являются номера телефонов, коды, числа, т.к. с переменой элементов местами появляются другие выборки.

Пример. Из 10 учеников нужно выбрать старосту класса и его заместителя. Меняя местами 2 учеников, изменятся их должности.

Неупорядоченными выборками называются выборки, в которых не важен порядок элементов.

Например, из множества двузначных чисел неупорядоченные выборки составляют числа, которые делятся на 3, т.к. заменив порядок цифр в таких числах, их делимость не изменится.

Пример. Из 10 учеников нужно выбрать 2 дежурных. Меняя местами дежурных, пара останется той же.

4.1 Размещения

Определение. Размещением из n элементов по m элементов ($m \le n$) называется упорядоченная выборка элементов m из данного множества элементов n.

Количество размещений из n элементов по m элементов обозначается A_n^m (читается как «размещение из n элементов по m элементов»).

Размещения вычисляются по формуле $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$.

Пример. Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 2;3;4;5;6 (если цифры не должны повторяться)?

Решение:

Выбираются 2 элемента из множества 5 элементов.

В данном случае n=5 (т.к. дано множество с 5 цифрами), а m=2 (т.к. нужно выбрать 2 цифры для числа).

Вычисляем A_5^2 по формуле $A_5^2 = \dfrac{5!}{(5-2)!} = \dfrac{5!}{3!} = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$.

Ответ: из данных цифр можно составить 20 двузначных чисел с различными цифрами.

Пример. У стола осталось 6 свободных мест. Сколькими различными способами места могут занять 4 человека?

Решение:

Основное множество составляют 6 свободных мест, значит, n=6, выборку составляют 4 человека, значит, m=4. Так как важен порядок, в котором люди займут места, количество выборок равно количеству размещений из 6 элементов по 4 элемента, т.е., $A_6^4 = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}{1\cdot2} = 360$.

Ответ: За столом 6 свободных мест четыре человека могут занять 360 различными способами.

Размещения с повторениями

Упорядоченные выборки k элементов с повторениями, которые составлены из основного множества n элементов, называются **размещениями с повторениями** из n элементов по k элементов.

Их количество обозначается как $\bar{A}_n^k$ и находится по формуле: $\bar{A}_n^k = n^k$.

Пример. Даны цифры 1;2;3;4.

Сколько различных двузначных чисел можно составить, если цифры в числе могут повторяться?

Решение:

Так как цифры в числе могут повторяться, нужно использовать формулу числа размещений с повторениями из n элементов по k, где n=4 (множество всех элементов), k=2 (т.к. нужно составить двузначные числа).

$$\bar{A}_4^2 = 4^2 = 16$$

Ответ: из данных цифр можно составить 16 различных двузначных чисел.

4.2 Сочетания

Определение. Сочетанием из n элементов по m элементов ($m \le n$) называется выборка элементов m из данного неупорядоченного множества.

Количество сочетаний обозначается как C_n^m (читается: «сочетания из n по m»).

Сочетания вычисляются по формуле $C_n^m = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}$.

Пример. Сколькими способами из 12 учеников можно выбрать 3 ученика?

Решение: Так как порядок выбора учеников не важен, нужно вычислить сочетания по 3 элемента из 12 элементов, т.е. n=12 и m=3.

$$C_{12}^{3}=\frac{12!}{3!\cdot(12-3)!}=\frac{12!}{1\cdot2\cdot3\cdot9!}=\frac{9!\cdot10\cdot11\cdot12}{6\cdot9!}=220$$

Ответ: трёх учеников из 12 можно выбрать 220 различными способами.

Пример. Из 6 человек (2 женщин и 4 мужчин) нужно выбрать 1 женщину и 2 мужчин. Сколькими способами это можно сделать?

Решение: Так как порядок выбора не важен (в конце концов команда будет той же), нужно вычислить, сколькими способами из 2 женщин можно выбрать 1, а из 4 мужчин двоих.

Количество сочетаний женщин (n=2 и m=1)

$$C_{2}^{1}=\frac{2!}{1!\cdot(2-1)!}=\frac{2}{1\cdot1}=2$$

Количество сочетаний мужчин (n=4 и m=2)

$$C_{4}^{2}=\frac{4!}{2!\cdot(4-2)!}=\frac{2!\cdot3\cdot4}{2!\cdot1\cdot2}=6$$

Чтобы получить ответ, используется закон умножения:

$$C_{2}^{1}\cdot C_{4}^{2}=2\cdot6=12$$

Ответ: из данных людей 1 женщину и 2 мужчин можно выбрать 12 различными способами.

Отличие размещений и сочетаний

При решении задач, в которых нужно определить число комбинаций, необходимо обратить внимание на то, важен ли порядок элементов. Этим различаются размещения и сочетания.

Пример. В самоуправлении из 25 человек нужно выбрать начальника, секретаря и кассира. Сколькими различными способами это можно сделать?

Решение: Из 25 человек нужно выбрать троих.

Порядок элементов важен, т.к. поменяв местами людей, обязанности их изменятся.

Значит, нужно вычислить число размещений из 25 элементов по 3.

$$A_{25}^{3}=\frac{25!}{(25-3)!}=\frac{25!}{22!}=\frac{22!\cdot23\cdot24\cdot25}{22!}=13800 \text{ (способов).}$$

Пример. В самоуправлении из 25 человек нужно выбрать 3 человека для комиссии. Сколькими различными способами это можно сделать?

Решение: На этот раз порядок людей не важен, поэтому необходимо вычислить число сочетаний из 25 элементов по 3:

$$C_{25}^{3}=\frac{25!}{3!\cdot(25-3)!}=\frac{25!}{3!\cdot22!}=\frac{22!\cdot23\cdot24\cdot25}{6\cdot22!}=\frac{13800}{6}=2300 \text{ (способов).}$$

Количество сочетаний меньше количества размещений.

4.3 Перестановки

Перестановки — это специальный случай размещений, когда выборка так же велика, как данное множество.

Определение. Размещения по n элементов из n называются **перестановками из** n **элементов**.

Вычисляя перестановки, определяется, сколькими различными способами можно переупорядочить элементы множества, не меняя их количество.

Количество перестановок обозначается как P_n, где n — количество элементов множества.

Перестановки вычисляются по формуле $P_n=n!$

Пример. Если дано 3 элемента $a;b;c$, размещения такие:

1. $a;b;c$ 3. $b;a;c$ 5. $c;a;b$

2. $a;c;b$ 4. $b;c;a$ 6. $c;b;a$

Данные элементы можно переупорядочить 6 способами, т.е. $P_3=3!=1\cdot2\cdot3=6$

Замечание. В заданиях на перестановки не важно назвать сами перестановки, а важно назвать их количество.

Пример. Сколькими различными способами можно составить список учеников из 6 человек?

$P_6=6!=6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=720$

Ответ: список учеников можно составить 720 различными способами.

Пример.

В соревнованиях участвуют 6 команд: A; B; C; D; E и F. Сколько существует вариантов расположений команд с первого по шестое место, где команда A ни на первом, ни на последнем месте?

Решение:

1. Вычисляются все возможные порядки построения команд. (Для команды A есть 6 различных позиций: 1-е место, 2-е место, 3-е место... 6-е место)

$P_6=6!=6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=720$

2. Вычисляются все возможные порядки, где команда A не на первом месте. (Значит, для команды A есть только 5 различных позиций: 2-е место, 3-е место... 6-е место)

$P_5=5!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$

3. Вычисляются все возможные порядки, где команда A не на последнем месте. (Значит, для команды A есть 5 различных позиций: 1-е место, 2-е место, 3-е место, 4-е место, 5-е место)

$P_5=5!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$

4. Вычисляется, сколько существует вариантов расположений команд с первого по шестое место, где команда *A* ни на первом, ни на последнем месте. Из количества всех возможных вариантов вычитаются вычисленные ограничения: 720−(120+120)=480 (способов).

Ответ: при данных условиях команды можно расставить 480 различными способами.

Перестановки с повторениями

Если в основном множестве *k* элементов a_1, a_2,…, a_k и выборка *n* элементов составляется так: элемент a_1 повторяется n_1 раз, элемент a_2 повторяется n_2 раз, ... , элемент a_k повторяется n_k раз, то такие выборки называются **перестановками с повторениями**.

Их возможное количество вычисляется по формуле: $\overline{P_n} = \dfrac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$.

Пример. Сколько различных пятибуквенных слов можно составить из букв слова «манна»?

Решение: В слове буквы **а** и **н** повторяются 2 раза, а буква **м** один раз.

$$\overline{P_5} = \frac{5!}{2! \cdot 2! \cdot 1!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 30$$

4. Треугольник Паскаля. Бином Ньютона

Рассcмотренные выше соединения, в частности, сочетания, находят свое применение не только при решении комбинаторных задач. С их помощью могут быть легко выведены некоторые формулы алгебры многочленов, например, бином Ньютона.

Укажем некоторые свойства сочетаний.

1. Для любых значений *n* и *m* (0≤*m*≤*n*) действительно равенство $C_n^m = C_n^{n-m}$.
2. Для числа сочетаний: $C_{n+1}^m = C_n^{m-1} + C_n^m$,(1≤*m*≤*n*)

Например, $C_3^1 = C_2^0 + C_2^1$.

3. Для любого допустимого значения *n* в силе $C_n^0 = C_n^n = 1$.

Используя два последних свойства, из сочетаний можно составить треугольник Паскаля.

Данный треугольник был известен уже во втором веке до нашей эры в древней Индии. В XII веке он появился в работах математиков Китая. В Европе в XVI веке его описал немецкий математик М. Штифель и затем Паскаль в XVII веке.

Треугольник Паскаля представляет собой треугольную таблицу, состоящую из числовых строчек (рис. 2.66). В первой строчке одно число, во второй — два, в третьей — три, и т.д. Первое и последнее число каждой строчки равно 1. Каждое из остальных чисел равно сумме двух расположенных над ним чисел предыдущей строки.

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

Рисунок 2.66 – Треугольник Паскаля

$$
\begin{array}{c}
C_0^0 = 1 \\
C_1^0 = 1 \quad C_1^1 = 1 \\
C_2^0 = 1 \quad C_2^1 = 2 \quad C_2^2 = 1 \\
C_3^0 = 1 \quad C_3^1 = 3 \quad C_3^2 = 3 \quad C_3^3 = 1 \\
C_4^0 = 1 \quad C_4^1 = 4 \quad C_4^2 = 6 \quad C_4^3 = 4 \quad C_4^4 = 1 \\
\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\
C_n^0 \quad C_n^1 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad C_n^{n-1} \quad C_n^n
\end{array}
$$

Рисунок 2.67 – Треугольник Паскаля с сочетаниями

Используя треугольник Паскаля, можно сделать вывод, что, сложив числа в любой строчке треугольника Паскаля, можно получить степень числа 2:

$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$,если n=0;1;2;3;...

Биноминальная формула Ньютона

Биноминальная формула Ньютона представляет собой разложение n –й степени двучлена и имеет следующий вид:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^k a^k b^{n-k} + \ldots + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + C_n^n a^0 b^n$$

Правая часть формулы называется **разложением** степени бинома.

C_n^k называется **биномиальными коэффициентами**, а все слагаемые — **членами** бинома.

Биномиальные коэффициенты — это те числа, которые составляют треугольник Паскаля.

Сумма биномиальных коэффициентов равна 2^n.

$(a+b)^0=$						1					
$(a+b)^1=$					$1a$	+	$1b$				
$(a+b)^2=$				$1a^2$	+	$2ab$	+	$1b^2$			
$(a+b)^3=$			$1a^3$	+	$3a^2b$	+	$3ab^2$	+	$1b^3$		
$(a+b)^4=$		$1a^4$	+	$4a^3b$	+	$6a^2b^2$	+	$4ab^3$	+	$1b^4$	
$(a+b)^5=$	$1a^5b^0$	+	$5a^4b^1$	+	$10a^3b^2$	+	$10a^2b^3$	+	$5a^1b^4$	+	$1a^0b^5$
...											

Рисунок 2.68 – Разложение степеней бинома

Пример. Напишем разложение степени бинома:

$$(x-2y)^6 = (x+(-2y))^6 = x^6 + 6x^5(-2y) + 15x^4(-2y)^2 + 20x^3(-2y)^3 + 15x^2(-2y)^4 + 6x(-2y)^5 + (-2y)^6$$

Пример. Вычислим средний член разложения $(3a+b)^6$:

В разложении 6+1=7 членов, значит, средний член — четвёртый.

$$T_4 = T_{3+1} = C_6^3 (3a)^{6-3} b^3 = \frac{6!}{3!\cdot 3!} 3^3 a^3 b^3 = \frac{4\cdot 5\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3} 27a^3b^3 = 540a^3b^3$$

Вопросы для самоконтроля:

1. Что изучает наука комбинаторика?

2. Какие основные виды соединений Вы знаете?

3. В чем состоит правило суммы?

4. В чем суть правила умножения?

5. Дайте определение перестановкам без повторения.

6. Приведите формулу для вычисления перестановок без повторения.

7. Дайте определение перестановкам с повторением.

8. Какие соединения называются размещениями?

9. Приведите формулу для вычисления размещений**.**

10. Дайте определение сочетаниям без повторений.

11. Приведите формулу для вычисления сочетаний без повторения.

12. В чем отличие сочетаний от размещений?

13. Запишите формулу бинома Ньютона.

14. Перечислите свойства биноминальных коэффициентов.

15. Сформулируйте принцип построения треугольника Паскаля.

Литература:

[1] С. 22-30, С. 48-53; [4] С.39-43; [12] – [21].

2.7 Тема 7 Основы тригонометрии

Лекция11. Основные понятия. Радианная мера угла. Вращательное движение. Синус, косинус, тангенс и котангенс числа. Основные тригонометрические тождества

Слово «тригонометрия» греческое, оно переводится как «измерение треугольников». Как известно из геометрии, синус, косинус, тангенс, котангенс угла используются при решении треугольников, поэтому формулы для них называют тригонометрическими.

1. Понятие угла

В геометрии угол определяется как часть плоскости, ограниченная двумя лучами. При таком определении получаются углы от 0° до 180°. В физике (для колебательных, волновых и других процессов) приходится учитывать углы больше 360°. Поэтому возникает понятие обобщенного угла.

Угол можно рассматривать как меру поворота.

Возьмем на координатной плоскости окружность радиуса 1 с центром *O* в начале координат.

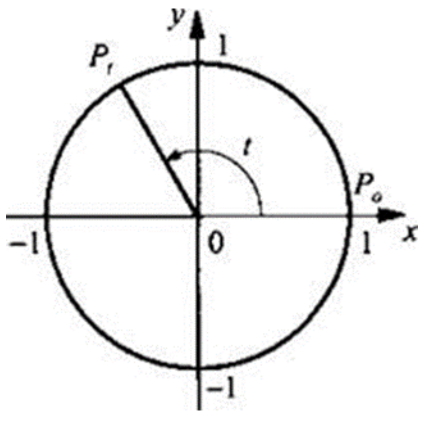
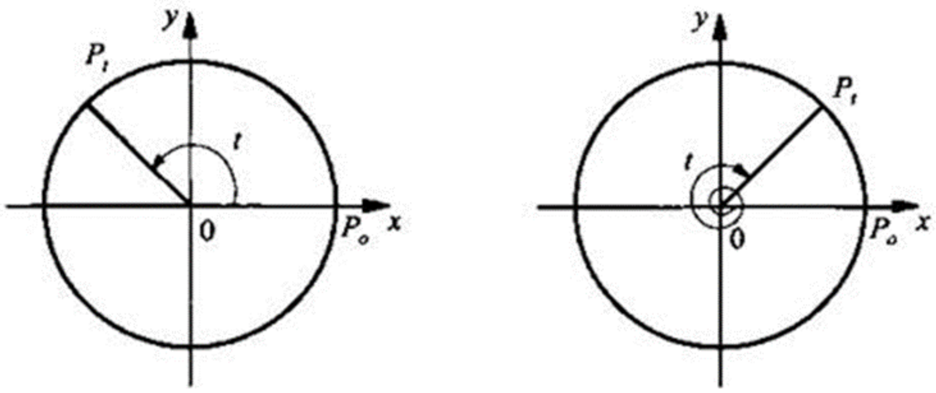


Рисунок 2.69 – Обобщенный угол на единичной окружности

Такую окружность называют **числовой (единичной)** окружностью. Возьмем точку $P_0(1;0)$. Сместим эту точку по окружности и получим точку P_t. При этом смещение может происходить и по часовой стрелке, и против часовой стрелки на любую величину (как меньше одного оборота, как и больше одного оборота). Будем считать $\angle P_0OP_t$ **обобщенным углом** (или просто **углом** *t*).

Углы, полученные поворотом точки P_0 против часовой стрелки, считаются **положительными**, по часовой стрелке – **отрицательными**. Принято указывать направление поворота стрелкой, а в случае более одного оборота - число оборотов. Например, на рисунке 2.70 показаны положительный (а) и отрицательный (б) углы.



а) б)

Рисунок 2.70 – Обобщенный угол на единичной окружности

2. Радианная мера угла

Из курса геометрии известно, что отношение длины дуги *l*, на которую опирается угол α , к радиусу *R* окружности не зависит от самого радиуса. Поэтому это отношение может быть выбрано характеристикой и мерой угла: $\alpha = \frac{l}{R}$.

Такая мера называется **радианной** мерой угла и используется наравне с угловой. Говорят, что угол равен определённому числу радиан. Ясно, что угол в один радиан опирается на длину дуги окружности, равную её радиусу. В самом деле: $\alpha = \frac{R}{R} = 1 радиан$. Обозначение радиана – «рад». Так как длина всей окружности радиуса *R* равна $2\pi R$, то всей окружности соответствует угол $\alpha = \frac{2\pi R}{R} = 2\pi$ радиан. Поскольку вся окружность содержит 360°, то один радиан соответствует $\frac{360^\circ}{2\pi} = \frac{180^\circ}{\pi}$ градусам: $1 рад = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ 17'$.

И наоборот, $1^\circ = \frac{\pi}{180} рад$.

Значит, можно написать следующие формулы перехода от градусного измерения к радианному: $\alpha = \frac{\pi \alpha^\circ}{180^\circ} рад$, и от радианного измерения к градусному: $\alpha^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} \alpha$.

Обозначение «рад» при записи часто опускают и вместо, например, 180° = π рад пишут просто 180° = π.

Пользуясь этими формулами, легко получить следующую таблицу перевода некоторых наиболее часто встречающихся углов из градусной меры в радианную и обратно (табл. 2.5).

Таблица 2.5 – Перевод углов из градусной меры в радианную и наоборот

Угол, градусы	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Угол, радианы	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Примеры.

1. $\frac{5\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 150^\circ$

2. $-\frac{7\pi}{3} = -\frac{7\pi}{3} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = -420^\circ$

3. $210^\circ = 210^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{7\pi}{6}$

4. $-675^\circ = -675^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = -\frac{9\pi}{4}$

3. Синус, косинус, тангенс и котангенс числа

Вперве с терминами «синус», «косинус», «тангенс», «котангенс» (их еще называют основными **тригонометрическими функциями**) мы встретились в курсе геометрии, рассматривая прямоугольный треугольник. Напомним эти определния.

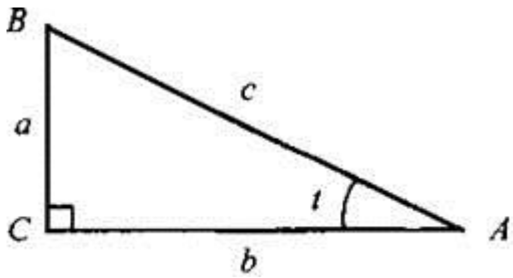


Рисунок 2.71– Прямоугольный треугольник *ABC*

Рассмотрим прямоугольный треугольник *ABC* (рис. 2.71) с катетами a и b и гипотенузой c, с острым углом t.

Тогда $\sin t = \frac{a}{c}$ (отношение противолежащего катета к гипотенузе);

$\cos t = \frac{b}{c}$ (отношение прилежащего катета к гипотенузе);

$tgt = \dfrac{a}{b}$ (отношение противолежащего катета к прилежащему катету);

$ctgt = \dfrac{b}{a}$ (отношение прилежащего катета к противолежащему катету).

Для данного угла *t* отношения $\dfrac{a}{c}, \dfrac{b}{c}, \dfrac{a}{b}, \dfrac{b}{a}$ не зависят от величин *a, b* и *c*, а зависят только от величины угла *t*. Следовательно, $\sin t, \cos t, tgt, ctgt$ являются *функциями угла t*.

Пример. Напомним, можно найти значения тригонометрических функций для угла, например, $t = \dfrac{\pi}{6}$.

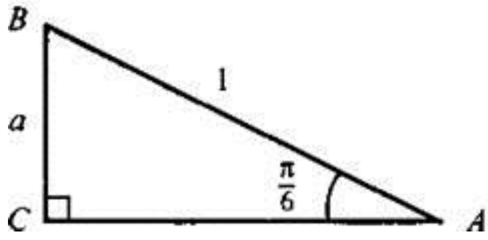


Рисунок 2.72 – прямоугольный треугольник *ABC* с углом $A = \dfrac{\pi}{6} = 30^\circ$

Так как тригонометрические функции угла не зависят от сторон треугольника, то рассмотрим прямоугольный треугольник с гипотенузой *AB = 1* и острым углом $A = \dfrac{\pi}{6} = 30^\circ$. В таком треугольнике $BC = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{1}{2}$.

Тогда по теореме Пифагора $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{1^2 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Теперь легко найти все тригонометрические функции:

$$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{2}, \cos\frac{\pi}{6} = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}, tg\frac{\pi}{6} = \frac{BC}{AC} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}, ctg\frac{\pi}{6} = \frac{AC}{BC} = \sqrt{3}.$$

Аналогичным образом были получены тригонометрические функции углов $\dfrac{\pi}{4} = 45^\circ, \dfrac{\pi}{3} = 60^\circ$. Их значения приведены в таблице 2.6.

Таблица 2.6 – Значения тригонометрических функций углов 1-й четверти

α	30^0	45^0	60^0
sin α	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos α	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg α	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
ctg α	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

Используя свойства тригонометрических функций и формулы приведения, которые будут рассмотрены в дальнейшем, можно находить значения тригонометрических функций и для других углов, связанных с углами $\frac{\pi}{6} = 30^\circ, \frac{\pi}{4} = 45^\circ, \frac{\pi}{3} = 60^\circ$.

Введем теперь понятие тригонометрических функций для произвольного угла. Удобнее это делать, рассматривая единичную окружность.

Пусть точка P_t числовой окружности (рис. 2.73) получена при повороте точки $P_0(1;0)$ на угол *t*.

Тогда *ордината* точки P_t – *синус угла t*,

а *абсцисса* точки P_t – *косинус угла t*,

т. е. $y = \sin t$ и $x = \cos t$.

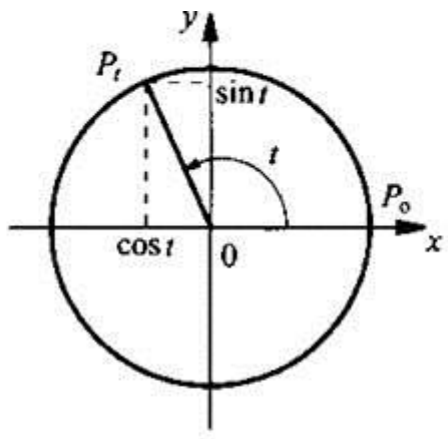


Рисунок 2.73 – Понятие синуса и косинуса угла

Отсюда следует, что $-1 \le \cos t \le 1, -1 \le \sin t \le 1$.

Отношение синуса числа t к косинусу того же числа называют **тангенсом числа** t и обозначают tgt. Таким образом, $tgt = \dfrac{\sin t}{\cos t}$.

Отношение косинуса числа t к синусу того же числа называют **котангенсом числа** t и обозначают *ctgt*. Таким образом, $ctgt = \dfrac{\cos t}{\sin t}$.

Для синуса и косинуса геометрическая иллюстрация на числовой окружности представлена на рисунке 2.73.

Дадим геометрическую иллюстрацию для тангенса и котангенса.

Проведем касательную l с уравнением $x = 1$ к единичной окружности. Рассмотрим точку P_t этой окружности и проведем прямую OP_t до пересечения с прямой l в точке T_t. Найдем ординату точки T_t. Прямая OP_t проходит через точки $O(0;0)$ и $P_t(\cos t; \sin t)$. Поэтому такая прямая имеет уравнение $y = x \cdot tgt$. Абсцисса точки T_t равна 1, тогда ее ордината равна *tg t*. Итак, ордината точки пересечения прямых OP_t и l равна тангенсу *t*. Поэтому прямую l называют **линией тангенсов**. При этом *tg t* имеет смысл для $t \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$, т. е. в случае пересечения прямых OP_t и l.

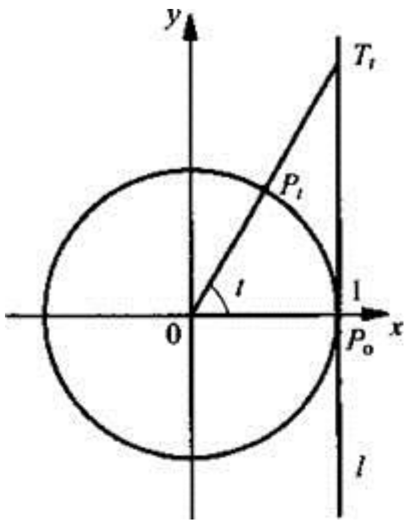


Рисунок 2.74 – Понятие тангенса угла

Аналогичным образом определяют и котангенс. Проведем касательную m с уравнением $y = 1$ к единичной окружности. Рассмотрим точку P_t этой окружности и проведем прямую OP_t до пересечения с прямой m в точке C_t. Можно показать, что абсцисса точки пересечения прямых OP_t и m равна котангенсу *t*. Поэтому прямую m называют **линией котангенсов**. При этом *ctg t* имеет смысл для $t \neq \pi k, k \in Z$, т. е. в случае пересечения прямых OP_t и m.

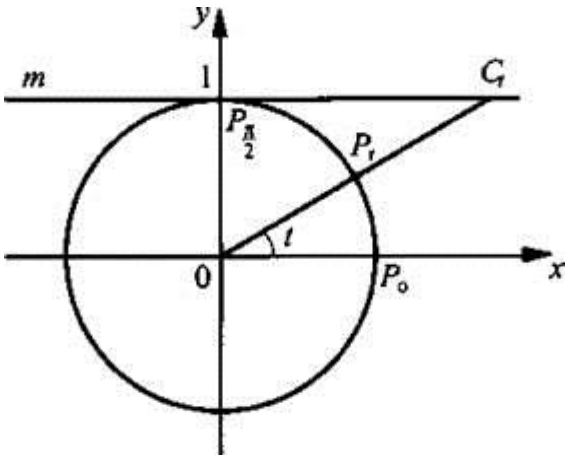


Рисунок 2.75 – Понятие котангенса угла

Обобщим: значения синуса угла читаются с оси *Oy*, значения косинуса угла читаются с оси *Ox*, тангенса – с линии тангенсов, котангенса – с линии котангенсов.

Важно уметь считывать с круга значения тригонометрических функций четвертных углов.

Таблица 2.7 – Значения тригонометрических функций четвертных углов

t	sint	cost	tgt	ctgt
$0^\circ, 360^\circ = 2\pi$	0	1	0	-
$90^\circ = \dfrac{\pi}{2}$	1	0	-	0
$180^\circ = \pi$	0	-1	0	-
$270^\circ = \dfrac{3\pi}{2}$	-1	0	-	0

Не менее важно знание знаков тригонометрических функций по четвертям (табл.2.8).

Таблица 2.8 – Значения тригонометрических функций по четвертям

Функция	Знаки тригонометрических функций по четвертям			
	I	II	III	IV
sin α	+	+	−	−
cos α	+	−	−	+
tg α	+	−	+	−
ctg α	+	−	+	−

Отметим также несколько важных **свойств синуса, косинуса, тангенса и котангенса**:

1. Если рассмотреть точки единичной окружности, лежащие симметрично оси *Ox*, можно заметить, что их ординаты противоположны по знаку, а абсциссы одинаковы, в то время как для точек, симметричных относительно оси *Oy*, наоборот, ординаты одинаковы, а абсциссы противоположны по знаку. Это наблюдение позволяет сформулировать следующее свойство. Для любого значения *t* справедливы равенства:

$$\sin(-t) = -\sin t$$
$$\cos(-t) = \cos t$$
$$tg(-t) = -tgt$$
$$ctg(-t) = -ctgt$$

2. Вращая точку вокруг центра единичной окружности в положительном или отрицательном направлении, замечаем, что она вернётся к исходному положению, только угол поворота будет на 2π больше или меньше, но координаты точки *A* останутся теми же, т.е.

$$\sin(t \pm 2\pi k) = \sin t$$
$$\cos(t \pm 2\pi k) = \cos t$$

3. В отношении тангенса и котангенса повторение значений происходит через каждые π, т.е. для любого значения *t* справедливы равенства:

$$tg(t \pm \pi k) = tgt$$
$$ctg(t \pm \pi k) = ctgt$$

4. Основные тригонометрические тождества

Рассмотрим уравнение единичной окружности: $x^2 + y^2 = 1$. Это равенство означает, что для любой точки окружности квадрат ее абсциссы и квадрат ее ординаты в сумме дают единицу. А т.к. $x = \cos\alpha$, а $y = \sin\alpha$, подставляя эти выражения в уравнение окружности, получаем: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Это равенство называтся **основным тригонометрическим тождеством**.

Получим следствия из него. Поделив обе части на $\cos^2\alpha \neq 0$, получаем: $\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ или с учетом того, что $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, имеем: $tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$.

Поделив обе части на $\sin^2\alpha \neq 0$, получаем: $\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}$ или с учетом того, что $ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, имеем: $ctg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha}$.

Так как $tg\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, а $ctg\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$.

Рассмотрим примеры на применение полученных формул.

Пример. Найдем значения остальных тригонометрических функций, если: $\sin\alpha = -0{,}8, \alpha \in (\pi; 1{,}5\pi)$.

Решение: используя основное тригонометрическое тождество $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, имеем: $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$, отсюда $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$ и в нашем примере $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-0{,}64} = \pm 0{,}6$.

Т. к. $\alpha \in (\pi; 1{,}5\pi)$ (III координатная четверть), то $\cos\alpha = -0{,}6$.

По формуле $tg\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ вычисляем $tg\alpha = \dfrac{-0{,}8}{-0{,}6} = \dfrac{8}{6} = \dfrac{4}{3}$.

По формуле $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$ вычисляем $ctg\alpha = \dfrac{1}{4/3} = \dfrac{3}{4}$.

Пример. Упростить $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 2\sin\alpha\cos\alpha$.

Решение:

$$(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 2\sin\alpha\cos\alpha = \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Пример. Упростить $\dfrac{\sin t}{1+\cos t} + \dfrac{\sin t}{1-\cos t}$.

Решение: $\dfrac{\sin t}{1+\cos t} + \dfrac{\sin t}{1-\cos t} = \dfrac{\sin t(1-\cos t) + \sin t(1+\cos t)}{(1+\cos t)(1-\cos t)} =$

$$\frac{\sin t - \sin t\cos t + \sin t + \sin t\cos t}{1-\cos^2 t} = \frac{2\sin t}{\sin^2 t} = \frac{2}{\sin t}.$$

Вопросы для самоконтроля:

1. Как строится угол на числовой окружности?

2. Дайте определение 1 радиана и 1 градуса.

3. Запишите формулу перехода от градусного измерения угла к радианному.

4. Дайте определение основным тригонометрическим функциям произвольного угла.

5. Дайте определение основным тригонометрическим функциям острого угла в прямоугольном треугольнике.

6. Перечислите значения некоторых тригонометрических функций.

7. Приведите знаки основных тригонометрических функций в разных четвертях.

8. Запишите основное тригонометрическое тождество.

9. Запишите формулу, связывающую тангенс и котангенс угла.

10. Запишите формулы, связывающие тангенс с косинусом и синус с котангенсом.

Литература:

[1] С. 193-246; [4] С. 279-294; [12] – [21].

Лекция 12. Формулы приведения. Формулы сложения. Формулы двойного аргумента. Формулы половинного угла. Преобразования простейших тригонометрических выражений

1. Формулы приведения

Если в качестве аргумента тригонометрической функции выступает выражение $\frac{\pi}{2}+\alpha, \frac{\pi}{2}-\alpha, \pi+\alpha, \pi-\alpha, \frac{3\pi}{2}+\alpha, \frac{3\pi}{2}-\alpha, 2\pi+\alpha, 2\pi-\alpha$ и вообще любое выражение вида $\frac{\pi n}{2}+\alpha, n \in Z$, то такое тригонометрическое выражение можно привести к более простому виду, когда в качестве аргумента тригонометрической функции будет выступать только аргумент *t*. Соответствующие формулы называют **формулами приведения**.

Таблица 2.9 – Формулы приведения

β	$\sin\beta$	$\cos\beta$	$tg\beta$	$ctg\beta$
$\pi/2+\alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$
$\pi+\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$
$3\pi/2+\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$
$2\pi+\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$
$-\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$
$\pi/2-\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$ctg\alpha$	$tg\alpha$
$\pi-\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$
$3\pi/2-\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$ctg\alpha$	$tg\alpha$
$2\pi-\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$

Формул приведения очень много. Таблицей пользоваться не всегда удобно. Запомнить их трудно – но самое главное, в этом нет необходимости. Достаточно запомнить одно-единственное правило – и легко можно самостоятельно выводить формулы и упрощать выражения.

1. если под знаком преобразуемой тригонометрической функции содержится сумма аргументов вида $\pi+\alpha, \pi-\alpha, 2\pi+\alpha, 2\pi-\alpha$, то наименование тригонометрической функции следует сохранить;

2. если под знаком преобразуемой тригонометрической функции содержится сумма аргументов вида $\frac{\pi}{2}+\alpha, \frac{\pi}{2}-\alpha, \frac{3\pi}{2}+\alpha, \frac{3\pi}{2}-\alpha$, то наименование тригонометрической функции следует изменить на родственное – функция меняется на кофункцию;

3. перед полученной функцией от аргумента α надо поставить тот знак, который имела бы преобразуемая функция при условии, что $0 \prec \alpha \prec \frac{\pi}{2}$.

Это правило используется и в тех случаях, когда аргумент задан и в градусах, т.е. когда в качестве аргумента тригонометрической функции выступает выражение вида $90^\circ+\alpha, 90^\circ-\alpha, 180^\circ+\alpha, 180^\circ-\alpha, 270^\circ+\alpha, 270^\circ-\alpha, 360^\circ+\alpha, 360^\circ-\alpha$

Пример. Преобразуем $\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)$.

Наименование функции изменяется на $\sin\alpha$. Далее из того, что $0 \prec \alpha \prec \frac{\pi}{2}$, следует, что $\frac{\pi}{2}+\alpha$ – аргумент из второй четверти, а в ней преобразуемая функция косинус имеет знак "минус". Этот знак надо поставить перед полученной функцией. Таким образом, $\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha) = -\sin\alpha$.

2. Формулы синуса и косинуса суммы и разности аргументов

Основная цель преобразования тригонометрических выражений – привести заданное выражение к такому виду, чтобы найти его решение было проще. А средством для достижения этой цели являются формулы преобразования тригонометрических выражений.

Основными и наиболее важными формулами преобразования тригонометрических выражений являются формулы *синуса и косинуса суммы* аргументов, из них без особого труда выводятся практически все формулы тригонометрии.

Примечание. Для краткости и упрощения в дальнейшем исключим слово "аргументов" из названий формул – это общепринятая практика – и говоря о формулах синуса или косинуса суммы (разности) будем понимать, что это формулы синуса или косинуса суммы (разности) аргументов этих функций.

Формулы сложения:

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$

Рассмотрим теперь выражение $\sin(\alpha-\beta)$ в таком виде: $\sin(\alpha+(-\beta))$ и воспользуемся формулой синуса суммы: $\sin(\alpha+(-\beta))=\sin\alpha\cdot\cos(-\beta)+\cos\alpha\cdot\sin(-\beta)$. Теперь вспомним о свойстве четности функции косинус: $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$ и свойстве нечетности функции синус: $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$. Тогда, $\sin(\alpha+(-\beta))=\sin\alpha\cdot\cos(-\beta)+\cos\alpha\cdot\sin(-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta$. Аналогично преобразуем формулу с косинусом. Получаем *формулы разности*:

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$

Формулы тангенса суммы и разности аргументов:

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta};\; tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha tg\beta}{1+tg\alpha\cdot tg\beta}.$$

Оговорка о допустимых значениях аргументов означает, что все тангенсы имеют смысл, т.е. выполняются условия: $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, \beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi k, n,k\in Z$, $\alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi m, \alpha-\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi l, m,l\in Z$.

Эти формулы очень важны и широко применяются не только в математике, но и в физике - особенно, в радиотехнике.

Вывод формул естественным образом получается из определения функции тангенс и использования уже известных формул синуса и косинуса суммы и разности аргументов.

3. Формулы двойного аргумента

Формулы двойного аргумента позволяют представить тригонометрическую функцию удвоенного аргумента в виде выражения тригонометрических функций простого (одинарного) аргумента.

Эти формулы устанавливают соотношение между $\sin 2\alpha, \cos 2\alpha, tg 2\alpha$ и $\sin\alpha, \cos\alpha, tg\alpha$.

Формулы двойного угла тригонометрических функций*:*

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha,$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,$$
$$tg\,2\alpha = \frac{2tg\,\alpha}{1 - tg^2\alpha},$$
$$ctg\,2\alpha = \frac{ctg^2\alpha - 1}{2ctg\,\alpha}.$$

Приведем доказательство формулы для синуса двойного угла.

Рассмотрим выражение $\sin 2\alpha$, представим его аргумент в виде $2\alpha = \alpha + \alpha$ и воспользуемся известной формулой синуса суммы аргументов. Получим: $\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin\alpha \cdot \cos\alpha + \cos\alpha \cdot \sin\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$.

Аналогично выводится формулы косинуса и тангенса двойного угла.

Замечание. Формула косинуса двойного угла имеет еще две разновидности:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha,$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$$

Разумеется, все полученные формулы применимы и в тех случаях, когда место аргумента α занимает более сложное выражение, например, справедливы следующие соотношения:

$$\sin 4\alpha = 2\sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha$$
$$\cos 48^\circ = \cos^2 24^\circ - \sin^2 24^\circ$$

Любую из полученных формул двойного аргумента можно использовать как слева направо, так и справа налево (сворачивать) для решения тригонометрических выражений.

4. Формулы понижения степени (половинного угла)

Подставляя в формулы $\cos 2t = 1 - 2\sin^2 t$ и $\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$ значение $t = \frac{\alpha}{2}$, получаем формулы **половинного аргумента**:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{2},$$
$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{2}.$$

Разделив $\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{2}$ на $\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{2}$, получаем формулу $tg^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}$.

Откуда появилось такое название? Причина, видимо, в том, что в левой части обоих тождеств содержится вторая степень косинуса или синуса, а в правой части – первая степень косинуса (степень понизилась).

При применении этих формул будь внимателен: степень понижается, зато аргумент удваивается.

Полученные две формулы также называют формулами половинного аргумента, поскольку они позволяют, зная значение $\cos\alpha$, найти значение синуса и косинуса половинного аргумента $\frac{\alpha}{2}$.

5. Преобразования простейших тригонометрических выражений

Примеры.

1. Вычислите $\sin\frac{\pi}{12}$.

Решение: по формуле $\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$, имеем

$$\sin^2\frac{\pi}{12}=\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2}=\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{2-\sqrt{3}}{4}\approx 0{,}068.$$

2. Вычислите $2\sin 15^0\cos 15^0$.

Решение: используя формулу $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$, имеем

$2\sin 15^\circ\cdot\cos 15^\circ=\sin(2\cdot 15^\circ)=\sin 30^\circ=0{,}5$.

3. Доказать тождество: $\cos^2\alpha=(1-\sin\alpha)\cdot(1+\sin\alpha)$.

Доказательство: $(1-\sin\alpha)\cdot(1+\sin\alpha)=1-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha-$ правая часть, $\cos^2\alpha=\cos^2\alpha$.

4. Доказать тождество: $\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}=\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Доказательство: $\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}-\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\cos^2\alpha-(1-\sin^2\alpha)}{\cos\alpha(1-\sin\alpha)}=\frac{\cos^2\alpha-\cos^2\alpha}{\cos\alpha(1-\sin\alpha)}=0$.

Вопросы для самоконтроля:

1. Перечислите основные формулы сложения.
2. Сформулируйте мнемоническое правило для запоминания формул приведения.
3. Сформулируйте правило написания формул приведения.
4. Приведите пример на применение формул приведения.

5. Приведите формулы суммы углов.

6. Запишите формулы двойного угла тригонометрических функций.

7. Запишите формулы половинного аргумента тригонометрических функций.

Литература:

[1] С. 193 –272; [4] С. 279 – 302; [12] – [21].

Лекция 13. Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение и произведения в сумму. Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента

1. Преобразование сумм тригонометрических функций в произведение

Речь пойдёт о формулах, которые позволяют сумму или разность синусов или косинусов разложить на множители.

Рассмотрим выражение $\sin(x+y)+\sin(x-y)$. Применив формулы синуса суммы и синуса разности, получим: $(\sin x\cdot\cos y+\cos x\cdot\sin y)+(\sin x\cdot\cos y-\cos x\cdot\sin y)=2\sin x\cdot\cos y$.

Введём обозначения: $\alpha=x+y, \beta=x-y$.

Если эти равенства почленно сложить и вычесть, получим: $\alpha+\beta=2x, \alpha-\beta=2y$.

А теперь заменим в формуле $\sin(x+y)+\sin(x-y)=2\sin x\cdot\cos y$ $\alpha=x+y, \beta=x-y$, а $x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}, y=\dfrac{\alpha-\beta}{2}$. Тогда формула $\sin(x+y)+\sin(x-y)=2\sin x\cdot\cos y$ примет вид $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

Аналогичные рассуждения применимы для разности синусов, а такжже суммы и разности косинусов. В итоге имеем:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

$$tg\alpha + tg\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},\ \ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ \ \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,$$

$$tg\alpha - tg\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},\ \ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ \ \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi k.$$

2. Преобразование произведений тригонометрических функций в суммы

Известно, что любая математическая формула на практике применяется как справа налево, так и слева направо. Поэтому неудивительно, что в тригонометрии приходится осуществлять и «движение в обратном направлении»: преобразовывать произведение тригонометрических функций в сумму.

Мы знаем, что $\sin(x+y)+\sin(x-y)=2\sin x\cdot\cos y$. Отсюда получаем: $\sin x\cdot\cos y=\frac{\sin(x+y)+\sin(x-y)}{2}$.

Таковы три формулы, позволяющие преобразовать произведение тригонометрических функций в сумму:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right),$$
$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right),$$
$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right).$$

3. Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента

При решении некоторых задач оказываются полезными следующие формулы:

$$\sin\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}, \qquad \cos\alpha = \frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Докажем их: $$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\dfrac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Аналогично доказывается вторая формула.

Формулы верны лищь в том случае, когда $\cos\frac{\alpha}{2} \neq 0$.

Пример. Найти $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, если $tg\frac{\alpha}{2} = 2$.

Решение: $\sin\alpha = \dfrac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{4}{1+4} = 0{,}8$, $\cos\alpha = \dfrac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{1-4}{1+4} = -0{,}6$.

Вопросы для самоконтроля:

1. Запишите формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение.
2. Запишите формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму.
3. Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента

Литература:

[1] С. 266-279; [4] С. 303-306; [12] – [21].

Лекция 14. Простейшие тригонометрические уравнения. Обратные тригонометрические функции. Арксинус, арккосинус, арктангенс

Тригонометрическое уравнение — уравнение, содержащее неизвестное под знаком тригонометрической функции.

Уравнения вида $\sin x = a, \cos x = a, tgx = a, ctgx = a$ называются простейшими тригонометрическими уравнениями.

1. *Уравнение* $\cos x = a$

Если $|a|>1$, то уравнение $\cos x = a$ не имеет корней, т.к. $|\cos x| \leq 1$.

Например, уравнение $\cos x = -1{,}5$ не имеет корней.

Если $|a|\leq1$, то корни уравнения выражаются формулой $x = \pm\arccos a + 2\pi n, n \in Z$.

Что же такое $\arccos a$? «Арккосинус» в переводе с латинского означает дуга и косинус. Это функция, **обратная** косинусу.

Если $|a|\leq1$, то $\arccos a$ (арккосинус a) – это такое число из отрезка $[0;\pi]$, косинус которого равен a. Говоря иначе: $\arccos a = x \Rightarrow \cos x = a, |a| \leq 1, x \in [0;\pi]$.

Пример. Найти $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Выражение $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$ показывает, что косинус угла x равен $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ($\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$).

Далее просто находим точку этого косинуса на числовой окружности, что и является ответом:

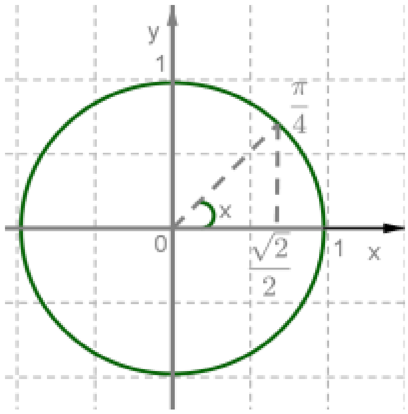


Рисунок 2.76 – Нахождение арккосинуса числа

Число, являющееся значением $\frac{\sqrt{2}}{2}$ на оси x, соответствует точке $\frac{\pi}{4}$ на числовой окружности.

Значит, $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$.

Если $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$.

В первом случае по точке на числовой окружности определяем значение косинуса, а во втором – наоборот, по значению косинуса находим точку на числовой окружности. Движение в обратную сторону. Это и есть арккосинус.

Теорема. Для любого $a\in[-1;1]$ выполняется равенство $\arccos\alpha + \arccos(-\alpha) = \pi$, или $\arccos(-\alpha) = \pi - \arccos\alpha$.

2. Уравнение $\sin x = a$

Если $|a|>1$, то уравнение $\sin x = a$ не имеет корней, т.к. $|\sin x| \le 1$.

Например, уравнение $\sin x = 2$ не имеет корней.

Если $|a|\le 1$, то корни уравнения выражаются формулой $x = (-1)^k \arcsin a + \pi n, n \in Z$.

Что же такое $\arcsin a$? «Арксинус» в переводе с латинского означает дуга и синус. Это функция, обратная косинусу.

Если $|a| \le 1$, то $\arcsin a$ (арксинус a) – это такое число из отрезка $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a. Говоря иначе: $\arcsin a = x \Rightarrow \sin x = a, |a| \le 1, x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Пример. Найти $\arcsin\frac{1}{2}$.

Выражение $\arcsin\frac{1}{2}$ показывает, что синус угла x равен $\frac{1}{2}$, т.е. $\sin x = \frac{1}{2}$.

Далее просто находим точку этого синуса на числовой окружности, что и является ответом:

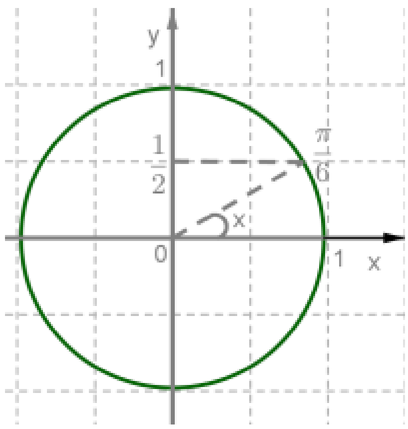


Рисунок 2.77 – Нахождение арксинуса числа

Точка $\frac{1}{2}$, находящаяся на оси y, соответствует точке $\frac{\pi}{6}$ на числовой окружности. Значит, $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$.

Если $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, то $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$.

В первом случае по точке на числовой окружности находим значение синуса, а во втором – наоборот, по значению синуса находим точку на числовой окружности. Движение в обратную сторону. Это и есть арксинус.

Теорема. Для любого $a \in [-1;1]$ справедлива формула $\arcsin(-a) = \arcsin a$.

3. Уравнение $tgx = a$

Уравнение $tgx = a$ имеет решения $x = arctga + \pi n, n \in Z$.

Что же такое $arctga$?

«Арктангенс» в переводе с латинского означает дуга и тангенс. Это функция, обратная тангенсу: $arctga$ (арктангенс a) – это такое число из интервала $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен a.

Говоря иначе: $arctga = x \Rightarrow tgx = a, x \in (-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$. **Теорема**. $arctg(-a) = -arctga$.

4. Уравнение $ctgx = a$

Уравнение $ctgx = a$ имеет решения $x=arcctga+\pi k, k\in Z$

Что же такое *arcctga*? – *arcctga* (арккотангенс *a*) - это такое число из отрезка (0; π), котангенс которого равен *a*. Говоря иначе: $arcctga=x\Rightarrow ctgx=a, x\in(0;\pi)$.

Теорема. $arcctg(-a) = \pi - arcctga$

Таблица 2.10 – Сводная таблица решения простейших тригонометрических уравнений

Уравнение	Решение
sin*x*=*a*	$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in Z$
cos*x*=*a*	$x = \pm \arccos a + 2\pi k, k \in Z$
tg*x*=*a*	$x = arctga + \pi k, k \in Z$
ctg*x*=*a*	$x = arcctga + \pi k, k \in Z$

Таблица 2.11 – Частные случаи простейших тригонометрических уравнений

Уравнение	Частные случаи		
	a= 1	*a*=0	*a*=1
sin*x*=*a*	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$	$x = \pi k, k \in Z$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$
cos*x*=*a*	$x = \pi + 2\pi k, k \in Z$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$	$x = 2\pi k, k \in Z$
tg*x*=*a*	$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$	$x = \pi k, k \in Z$	$x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$
ctg*x*=*a*	$x = \frac{3\pi}{4} + \pi k, k \in Z$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$	$x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$

Примеры.

1. Решить уравнение $\cos x = \frac{2}{5}$.

Используем формулу $x = \pm arccos a + 2\pi k,\ k \in Z$ и получаем ответ $x = \pm \arccos \frac{2}{5} + 2\pi n, n \in Z$.

2. Решить уравнение $\sin x = -\frac{1}{2}$.

Используем формулу $x = (-1)^k \arcsin a + \pi n, n \in Z$ и получаем ответ $x = (-1)^k \arcsin(-\frac{1}{2}) + \pi n, n \in Z = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$.

3. Решить уравнение $tgx = 2$.

Используем формулу $x = arctga + \pi n, n \in Z$ и получаем ответ $x = arctg 2 + \pi n, n \in Z$.

4. Рассмотрим пример решения простейшего тригонометрического уравнения на тригонометрическом круге.

Решить уравнение $\sin t = \frac{1}{2}$.

Решение: Решить уравнение – это найти множество всех значений t, при каждом из которых $\sin t = \frac{1}{2}$. Это уравнение имеет решение, т.к. число $\frac{1}{2}$ входит в множество значений синуса. На линии синусов отметим $\frac{1}{2}$ и проведем перпендикуляр до пересечения с окружностью. Получим точки M и N (рис. 2.78). Только эти две точки имеют ординату $\frac{1}{2}$.

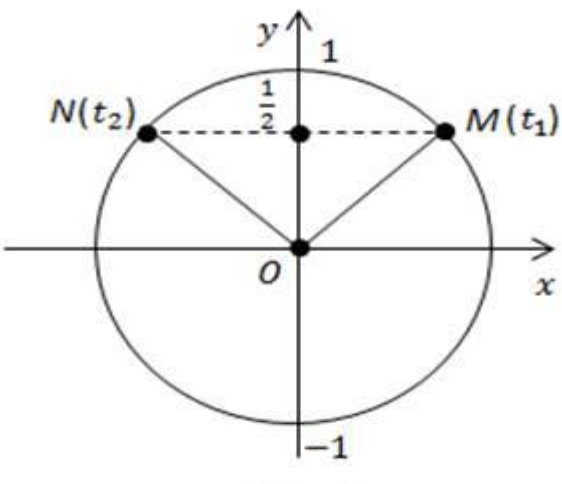


Рисунок 2.78 – Решение уравнения $\sin t = \frac{1}{2}$

Полученным точкам соответствуют множества действительных чисел t_1 и t_2:

$t_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $t_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$.

5. Решить уравнение $tgx = \sqrt{3}$.

Решение: На линии тангенсов отложим $\sqrt{3}$. Соединим эту точку с центром числовой окружности и получим две точки пересечения с окружностью – M и N (рис. 2.79).

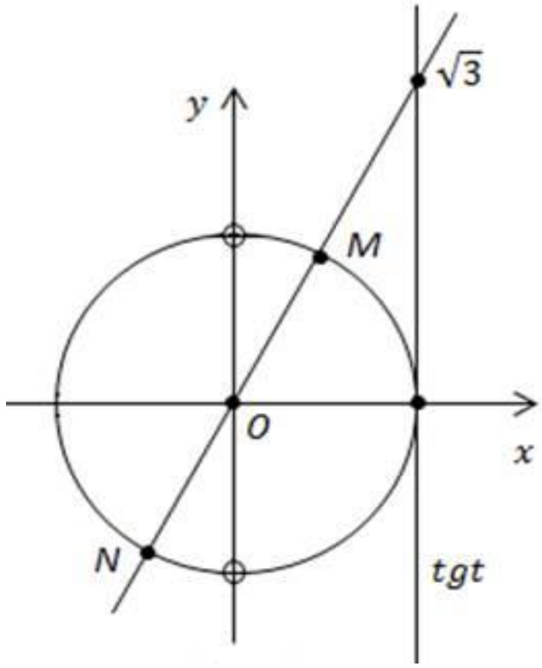


Рисунок 2.79 – Решение уравнения $tgx = \sqrt{3}$

Точке M соответствует множество чисел $t_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$. Точке N соответствует множество чисел $t_2 = \frac{\pi}{3} + \pi + 2\pi n, n \in Z$. Эти два множества чисел можно записать в виде $t = \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$.

Вопросы для самоконтроля:

1. Перечислите формулы для решения простейших тригонометрических уравнений в общем виде.
2. Дайте определение арксинуса числа.
3. Дайте определение арккосинуса числа.
4. Как проходит линия тангенсов?

5. Как проходит линия котангенсов?
6. Приведите формулы решения простейших тригонометрических уравнений.
7. Перечислите формулы частных случаев решения простейших тригонометрических уравнений.
8. Объясните метод решения простейших тригонометрических уравнений с помощью единичной окружности.

Литература:

[1] С. 295 – 298; [4] С. 314 – 326; [12] – [21].

Лекция 15. Тригонометрические уравнения и неравенства

Рассмотрим решение некоторых типов тригонометрических уравнений. Для этого необходимо с помощью преобразований данное уравнение свести к одному из простейших уравнений – $\sin x = a, \cos x = a, tgx = a, ctgx = a$, решение которых можно записать.

1. Простейшие тригонометрические уравнения

Примеры.

1. Решить уравнение $\cos t = \dfrac{1}{2}$.

Решение:

Число $\dfrac{1}{2} \le 1$, значит, уравнение имеет решения.

Требуется найти множество всех t, при каждом из которых $\cos t = \dfrac{1}{2}$.

Отметим на линии косинусов точку $\dfrac{1}{2}$ и проведем перпендикуляр до пересечения с окружностью. Получим две точки – M и N (рис. 2.80).

Полученным точкам соответствуют множества действительных чисел t_1 и t_2:

$t_1 = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n$, $t_2 = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$.

Ответ: $t = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$.

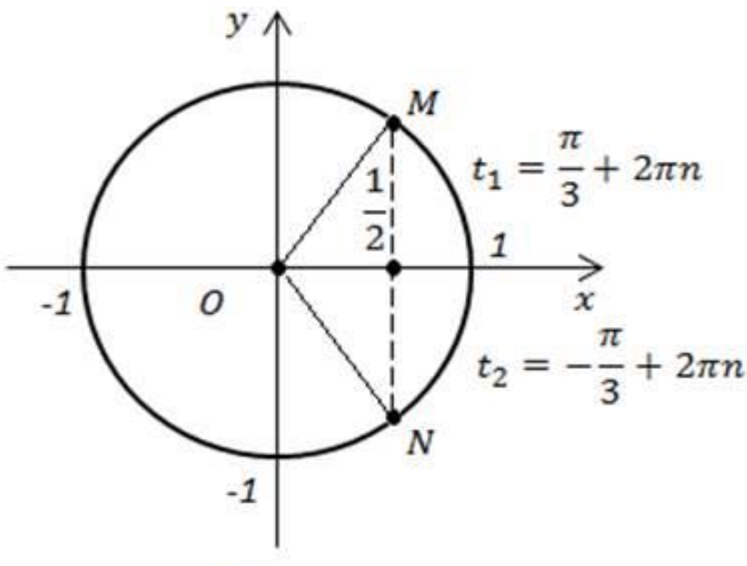


Рисунок 2.80 – Решение уравнения $\cos t = \frac{1}{2}$

2. Решить уравнение $ctgx = -\sqrt{3}$.

Решение: Отметим на линии котангенсов точку $-\sqrt{3}$. Соединим её с началом координат и получим на окружности две точки – M и N (рис. 2.81).

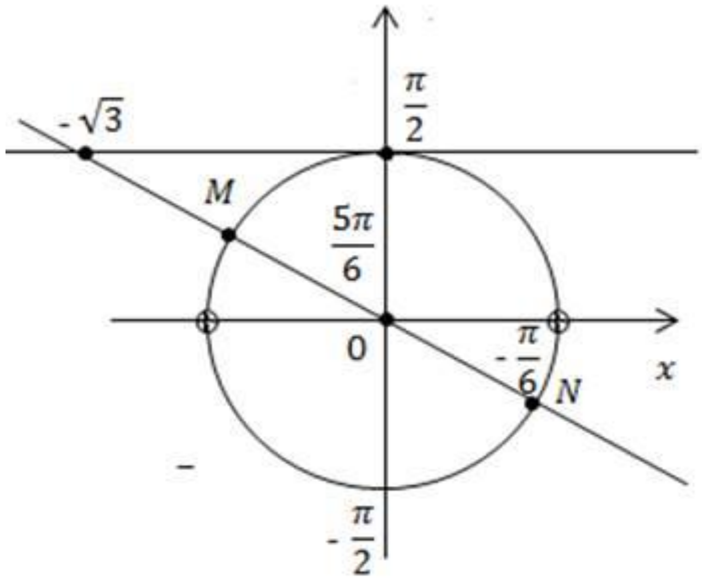


Рисунок 2.81 – Решение уравнения $ctgx = -\sqrt{3}$

$t = -\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$. Возможна и другая запись: $t = \frac{5\pi}{6} + \pi n, n \in Z$.

3. Найдем решения уравнения $\sin(3x - \frac{\pi}{4}) = 0$, принадлежащие отрезку [0; π].

Решим данное уравнение, используя числовую окружность.

Получим: $3x-\frac{\pi}{4}=\pi n, n\in Z$ и $x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{3}n, n\in Z$. Отберем те решения, которые принадлежат отрезку [0; π]. По условию получим неравенство $0\le\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{3}n\le\pi$. Решим это неравенство: $-\frac{\pi}{12}\le\frac{\pi}{3}n\le\frac{11\pi}{12}$ и $-\frac{1}{4}\le n\le\frac{11}{4}$. В этот промежуток попадают три целых значения *n: n* = 0, 1, 2. Для этих значений *n* найдем соответствующие решения: $x=\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12},\frac{9\pi}{12}=\frac{3\pi}{4}$.

4. Решим уравнение $tg(4x-\frac{\pi}{6})=\sqrt{3}$.

Используя общую формулу, получим: $4x-\frac{\pi}{6}=arctg\sqrt{3}+\pi n=\frac{\pi}{3}+\pi n, n\in Z$. Тогда, $4x=\frac{\pi}{3}+\pi n+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$ и $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}n, n\in Z$.

2. Два основных метода решения тригонометрических уравнений

Для решения более сложных уравнений используют метод введения новой переменной и метод разложения на множители.

2.1 Рассмотрим сначала **метод введения новой переменной**.

Решим уравнение: $3\cos^2 x-5\cos x+2=0$.

Введем новую переменную $z=\cos x$ и получим квадратное уравнение $3z^2-5z+2=0$, корни которого $z_1=1$ и $z_2=\frac{2}{3}$. Вернемся к старой неизвестной и получим простейшие уравнения $\cos x=1$ и $\cos x=\frac{2}{3}$. Решения первого уравнения $x=2n, n\in Z$, решения второго уравнения $x=\pm\arccos\frac{2}{3}+2\pi n, n\in Z$.

2.2.Теперь обсудим второй метод – **метод разложения на множители**.

При его применении уравнение *f(x) = 0* записывают в виде $f_1(x)\cdot f_2(x)=0$, тогда или $f_1(x)=0$, или $f_2(x)=0$. Таким образом, задача сводится к решению совокупности уравнений $f_1(x)=0$ и $f_2(x)=0$.

1. Решим уравнение: $(tgx-1)(\cos x+\frac{1}{2})=0$.

Левая часть уравнения уже разложена на множители. Задача сводится к решению совокупности уравнений $tgx-1=0$ (или $tgx=1$) и $\cos x+\frac{1}{2}=0$ (или $\cos x=-\frac{1}{2}$). Решения первого уравнения $x=arctg1+\pi n=\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z$, решения второго уравнения $x=\pm\arccos(-\frac{1}{2})+2\pi n=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$.

2. Решим уравнение: $2\cos 3x\sin\frac{x}{4}+\cos 3x=0$.

Вынесем cos 3x за скобки и получим: $\cos 3x(2\sin\frac{x}{4}+1)=0$. Теперь необходимо решить совокупность уравнений $\cos 3x=0$ и $2\sin\frac{x}{4}+1=0$ (или $\sin\frac{x}{4}=-\frac{1}{2}$). Решая первое уравнение, найдем: $3x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$ и $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}n, n\in Z$. Решая второе уравнение, получим: $\frac{x}{4}=(-1)^n\arcsin(-\frac{1}{2})+\pi n=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$ и $x=(-1)^{n+1}\frac{2\pi}{3}+4\pi n, n\in Z$.

Уточним рассматриваемый метод. Из уравнения $f_1(x)\cdot f_2(x)=0$ следует, что или $f_1(x)=0$ (при этом выражение $f_2(x)$ имеет смысл), или $f_2(x)=0$ (при этом выражение $f_1(x)$ имеет смысл).

Решим уравнение $ctgx(\cos x+1)=0$.

Из уравнения $ctgx=0$ находим: $x=arcctg0+\pi n=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$, из уравнения $\cos x+1=0$ (или $\cos x=-1$) получим: $x=\pi+2\pi m, m\in Z$. Но при таких значениях x выражение $ctg\,x$ не имеет смысла. Поэтому решения данного уравнения $x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$.

2.3. Однородные тригонометрические уравнения

Теперь обсудим часто встречающийся вид уравнений – однородные уравнения.

Определение. Уравнение вида $a\sin x+b\cos x=0$ (где $a\neq 0, b\neq 0$) называют **однородным** тригонометрическим уравнением **первой** степени. Уравнение вида $a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x=0$ (где $a\neq 0$) называют **однородным** тригонометрическим уравнением **второй** степени.

Рассмотрим сначала решение однородных тригонометрических уравнений первой степени $a\sin x+b\cos x=0$. Убедимся, что $\cos x\neq 0$. Предположим, что $\cos x=0$ и подставим эту величину в данное уравнение. Получим: $a\sin x=0$. Так как $a\neq 0$, то $\sin x=0$. Очевидно, что равенства $\cos x=0$ и $\sin x=0$ одновременно выполняться не могут.

Так как $\cos x\neq 0$, то разделим все члены уравнения на $\cos x$. Получим: $a\frac{\sin x}{\cos x}+b\frac{\cos x}{\cos x}=\frac{0}{\cos x}$ или $atgx+b=0$ откуда $tgx=-\frac{b}{a}$ и $x=arctg(-\frac{b}{a})+\pi n=-arctg\frac{b}{a}+\pi n$.

В качестве примера решим уравнение $3\sin(2x-\frac{\pi}{8})-2\cos(2x-\frac{\pi}{8})=0$.

Разделим все члены уравнения на $\cos(2x-\frac{\pi}{8})$ и получим: $3tg(2x-\frac{\pi}{8})-2=0$. Найдем $tg(2x-\frac{\pi}{8})=\frac{2}{3}, 2x-\frac{\pi}{8}=arctg\frac{2}{3}+\pi n, n\in Z$ и $x=\frac{1}{2}arctg\frac{2}{3}+\frac{\pi}{16}+\frac{\pi}{2}n, n\in Z$.

Рассмотрим теперь решение однородного тригонометрического уравнения второй степени $a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x=0$ (где $a\neq 0$). Убедимся, что $\cos x\neq 0$. Подставим значение $\cos x=0$ в данное уравнение и получим: $a\sin^2 x=0$. Так как $a\neq 0$, то имеем: $\sin x=0$. Но равенства $\cos x=0$ и $\sin x=0$ одновременно выполняться не могут.

Так как $\cos x\neq 0$, то разделим все члены уравнения на $\cos^2 x$ и получим: $a\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+b\frac{\sin x\cos x}{\cos^2 x}+c\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}=0$ или $atg^2x+btgx+c=0$. Введем новую переменную $z=tgx$ и придем к квадратному уравнению $az^2+bz+c=0$. Решаем это уравнение. Потом возвращаемся к старой переменной, получаем простейшие тригонометрические уравнения и находим их решения.

Решим уравнение $\sin^2 x-\sin x\cos x-2\cos^2 x=0$.

Разделим все члены уравнения на $\cos^2 x$ и получим: $tg^2x-tgx-2=0$. Введем новую переменную $z=tgx$ и получим квадратное уравнение $z^2-z-2=0$, корни которого $z_1=-1, z_2=2$. Вернемся к старой переменной. Имеем простейшие тригонометрические уравнения $tgx=-1$ (его решения $x=-arctg1+\pi n, n\in Z$) и $tgx=2$ (его решения $x=arctg2+\pi n, n\in Z$).

Пусть в однородном тригонометрическом уравнении $a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x=0$ коэффициент $a=0$. Тогда уравнение имеет вид: $b\sin x\cos x+c\cos^2 x=0$. В этом случае делить на $\cos^2 x$ нельзя, так как $\cos x$ может равняться нулю. Поэтому надо использовать метод разложения на множители. Получим $\cos x(b\sin x + c\cos x) = 0$. Имеем простейшее тригонометрическое уравнение $\cos x = 0$ и однородное тригонометрическое уравнение первой степени $b\sin x + c\cos x = 0$. Такие уравнения мы решать уже умеем.

Метод разложения на множители также используется и в случае, когда коэффициент $c = 0$. Тогда уравнение имеет вид: $a\sin^2 x + b\sin x\cos x = 0$ или $\sin x(a\sin x + b\cos x) = 0$. Вновь получаем простейшее тригонометрическое уравнение $\sin x = 0$ и однородное тригонометрическое уравнение первого порядка $a\sin x + b\cos x = 0$, которые решаются аналогично.

Сформулируем алгоритм решения уравнения $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0$.

1. Если коэффициент a не равен нулю, то все члены уравнения делят на $\cos^2 x$. Вводят новую переменную $z = tgx$ и получают квадратное уравнение. Находят корни этого уравнения и возвращаются к старой неизвестной. Получают простейшие тригонометрические уравнения и решают их.

2. Если коэффициенты a и c равны нулю, то используют метод разложения на множители. При $a = 0$ выносят за скобки $\cos x$, при $c = 0$ выносят $\sin x$. Получают простейшее тригонометрическое уравнение и однородное тригонометрическое уравнение первого порядка и решают их.

Вопросы для самоконтроля:

1. Приведите формулы решения простейших тригонометрических уравнений.

2. Укажите два основных метода решения тригонометрических уравнений.

3. Дайте определение однородного тригонометрического уравнения первой и второй степеней.

4. Укажите способ решения однородного тригонометрического уравнения первой степени.

5. Приведите методы решения тригонометрических уравнений в зависимости от типа.

Литература:

[1] С. 299 – 318; [4] С. 327 – 329; [12] – [21].

Лекция 16. Простейшие тригонометрические неравенства

Решение тригонометрических неравенств (как и уравнений), как правило, сводится к решению простейших тригонометрических неравенств. Поэтому прежде всего остановимся на решении таких неравенств. Их удобно решать, используя единичную окружность.

Пример 1. Решим неравенство $\sin x \succ \frac{1}{2}$.

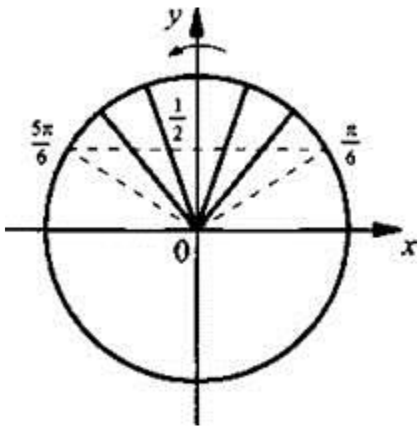


Рисунок 2.82 – Решение неравенства $\sin x \succ \frac{1}{2}$

На единичной окружности по оси ординат отложим значение $\sin x = \frac{1}{2}$ и построим соответствующие углы $x_1 = \frac{\pi}{6}$ и $x_2 = \frac{5\pi}{6}$ (углы откладываются против часовой стрелки и являются положительными). На рисунке 2.81 видно, что неравенству $\sin x \succ \frac{1}{2}$ удовлетворяют значения $\frac{\pi}{6} \prec x \prec \frac{5\pi}{6}$. Учтем, что период функции синуса составляет 2π, и получим решение данного неравенства $\frac{\pi}{6} + 2\pi n \prec x \prec \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$ или $x \in (\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n), n \in Z$.

Пример 2. Решим неравенство $ctgx \le -\sqrt{3}$.

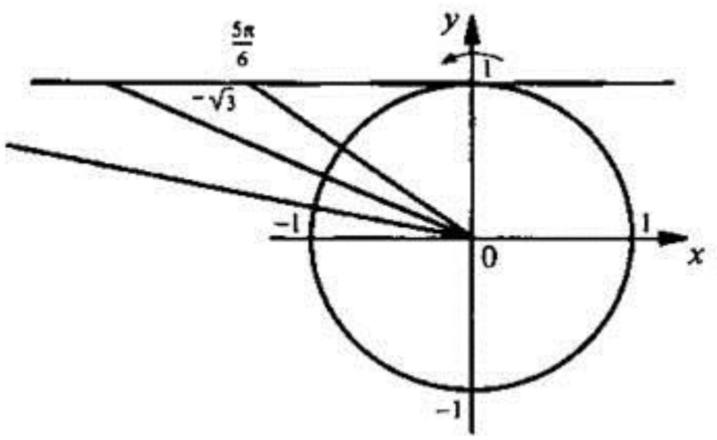


Рисунок 2.83 – Решение неравенства $ctgx \le -\sqrt{3}$

На оси котангенсов для единичной окружности отложим значение $ctgx=-\sqrt{3}$ и построим соответствующий угол $x=\frac{5\pi}{6}$. Видно, что неравенству $ctgx\le-\sqrt{3}$ удовлетворяют значения $\frac{5\pi}{6}\le x\prec\pi$. Учитывая период функции котангенса (равный π), получим решение данного неравенства: $\frac{5\pi}{6}+\pi n\le x\prec\pi+\pi n$ или $x\in\left[\frac{5\pi}{6}+\pi n;\pi+\pi n\right),n\in Z$.

В случае сложного аргумента тригонометрической функции рекомендуется обозначить его новой переменной, решить для него неравенство, а затем вернуться к старой неизвестной.

Пример 3. Решим неравенство $\cos(3x-\frac{\pi}{6})\le-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

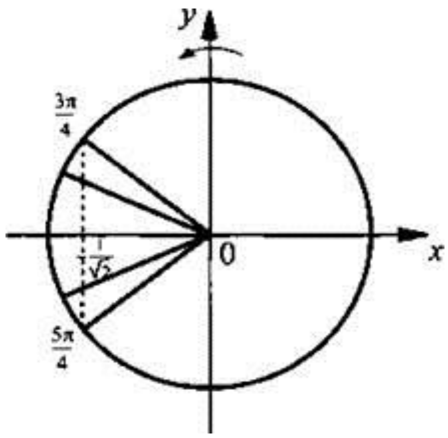


Рисунок 2.84 – Решение неравенства $\cos(3x-\frac{\pi}{6})\le-\frac{1}{\sqrt{2}}$

Обозначим аргумент косинуса $y=3x-\frac{\pi}{6}$ и получим простейшее тригонометрическое неравенство $\cos y\le-\frac{1}{\sqrt{2}}$. Решим это неравенство. На единичной окружности по оси абсцисс отложим значение $\cos y=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ и построим соответствующие углы $y_1=\frac{3\pi}{4}$ и $y_2=\frac{5\pi}{4}$. Тогда неравенству $\cos y\le-\frac{1}{\sqrt{2}}$ удовлетворяют значения $\frac{3\pi}{4}\le y\le\frac{5\pi}{4}$. Учтем периодичность функции $\cos y$ и получим решения $\frac{3\pi}{4}+2\pi n\le y\le\frac{5\pi}{4}+2\pi n,n\in Z$.

Теперь вернемся к старой неизвестной x и получим двойное линейное неравенство $\frac{3\pi}{4}+2\pi n\le 3x-\frac{\pi}{6}\le\frac{5\pi}{4}+2\pi n,n\in Z$. Ко всем частям неравенства прибавим число $\frac{\pi}{6}$.

Отсюда $\frac{11\pi}{12}+2\pi n \le 3x \le \frac{17\pi}{12}+2\pi n, n \in Z$. Все части неравенства разделим на положительное число 3. При этом знак неравенства сохраняется. Получим: $\frac{11\pi}{36}+\frac{2}{3}\pi n \le x \le \frac{17\pi}{36}+\frac{2}{3}\pi n, n \in Z$

или $x \in \left[\frac{11\pi}{36}+\frac{2}{3}\pi n; \frac{17\pi}{36}+\frac{2}{3}\pi n\right], n \in Z$.

Если неравенство не является простейшим, то используя преобразования, аналогичные тем, которые применялись для уравнений, сводим неравенство к простейшему.

Пример 4. Решим неравенство $tg^2 x-(1+\sqrt{3})tgx+\sqrt{3} \prec 0$.

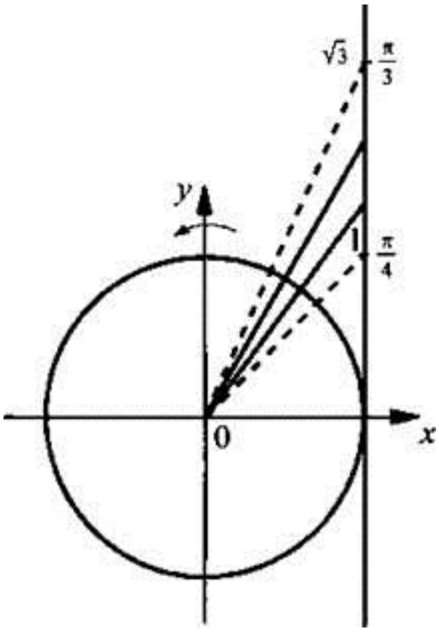


Рисунок 2.85 – Решение неравенства $tg^2 x-(1+\sqrt{3})tgx+\sqrt{3} \prec 0$

Введем новую переменную $y = tgx$ и получим квадратное неравенство $y^2-(1+\sqrt{3})y+\sqrt{3} \prec 0$. Это неравенство имеет решение $1 \prec y \prec \sqrt{3}$. Вернемся к старой неизвестной x и получим двойное неравенство $1 \prec tgx \prec \sqrt{3}$. На единичной окружности по оси тангенсов отложим значения 1 и $\sqrt{3}$ и построим соответствующие углы $x_1 = \frac{\pi}{4}$ и $x_2 = \frac{\pi}{3}$. Тригонометрическому неравенству удовлетворяют значения $\frac{\pi}{4} \prec x \prec \frac{\pi}{3}$. Учтем периодичность функции тангенса и получим решение данного неравенства: $\frac{\pi}{4}+\pi n \prec x \prec \frac{\pi}{3}+\pi n$

или $x \in \left(\frac{\pi}{4}+\pi n; \frac{\pi}{3}+\pi n\right), n \in Z$.

Также при решении тригонометрических неравенств можно использовать метод интервалов (который является универсальным для всех неравенств).

Пример 5. Решим неравенство $\dfrac{2\cos x+\sqrt{3}}{\sin 2x(2\sin x-\sqrt{3})}\le 0$.

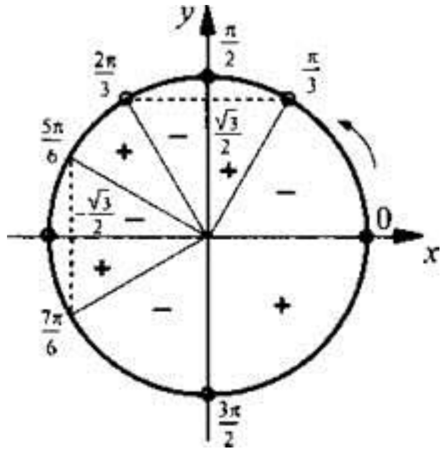


Рисунок 2.86 – Решение неравенства $\dfrac{2\cos x+\sqrt{3}}{\sin 2x(2\sin x-\sqrt{3})}\le 0$

На единичной окружности отметим значения *x*, при которых обращается в нуль числитель $2\cos x+\sqrt{3}=0$ (откуда $x=\dfrac{5\pi}{6}$ и $x=\dfrac{7\pi}{6}$) и знаменатель $\sin 2x=0$ (тогда $x=0, x=\dfrac{\pi}{2}, x=\pi, x=\dfrac{3\pi}{2}$). $2\sin x-\sqrt{3}=0$ (откуда $x=\dfrac{\pi}{3}$ и $x=\dfrac{2\pi}{3}$) дроби. Определим знак этой дроби, например, при $x=\dfrac{\pi}{6}$ получим: $\dfrac{2\cos\dfrac{\pi}{6}+\sqrt{3}}{\sin\dfrac{\pi}{3}(2\sin\dfrac{\pi}{6}-\sqrt{3})}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}(1-\sqrt{3})}\prec 0$.

Учтем, что при переходе через отмеченные значения *x* знак неравенства меняется на противоположный. Построим диаграмму знаков данной дроби. Также учтем значения *x*, при которых знаменатель дроби обращается в нуль (они отмечены кружками). Теперь легко выписать решения неравенства: $0\prec x\prec\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\prec x\prec\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{5\pi}{6}\le x\prec\pi,\dfrac{7\pi}{6}\le x\prec\dfrac{3\pi}{2}$. Учитывая, что через $2\pi n, n\in Z$ ситуация повторяется, выпишем решения данного неравенства:

$$x\in\left(2\pi n;\frac{\pi}{3}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{2\pi}{3}+2\pi n\right)\cup\left[\frac{5\pi}{6}+2\pi n;\pi+2\pi n\right)\cup\left[\frac{7\pi}{6}+2\pi n;\frac{3\pi}{2}+2\pi n\right), n\in Z.$$

При наличии в неравенстве функций тангенса и котангенса удобно перейти к функциям синуса и косинуса и использовать рассмотренный метод интервалов.

Пример 6. Решим неравенство $\frac{tgx-1}{\sin x} \geq 0$.

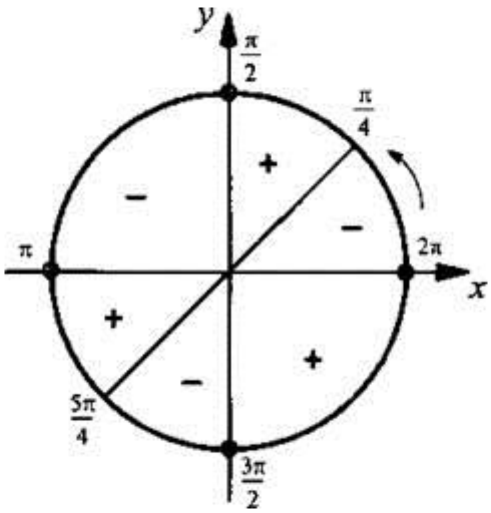


Рисунок 2.87 – Решение неравенства $\frac{tgx-1}{\sin x} \geq 0$

Учтем, что $tgx = \frac{\sin x}{\cos x}$ и запишем неравенство в виде $\frac{\sin x - \cos x}{\sin x \cos x} \geq 0$. Отметим на единичной окружности значения *x*, при которых обращается в нуль числитель $\sin x - \cos x = 0$ (откуда $x = \frac{\pi}{4}$ и $x = \frac{5\pi}{4}$) и знаменатель $\sin x \cos x = 0$ (тогда $x = \frac{\pi}{2}, x = \pi, x = \frac{3\pi}{2}, x = 2\pi$) дроби. Определим знак данной дроби, например, при $x = \frac{\pi}{3}$ и получим: $\frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2}} \succ 0$.

Учтем, что при переходе через отмеченные значения x знак неравенства меняется на противоположный. Построим диаграмму знаков данной дроби. Учтем также значения *x*, при которых знаменатель дроби обращается в нуль (они отмечены кружками). С учетом периодичности функций синуса и косинуса, входящих в неравенство, запишем окончательное решение данного неравенства $x \in \left[\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \cup \left(\pi + 2\pi n; \frac{5\pi}{4} + 2\pi n\right] \cup \left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n\right), n \in Z$.

При использовании метода интервалов необходимо помнить, что тригонометрическое выражение может иметь кратные корни. При переходе через корень нечетной кратности знак выражения меняется на противоположный, при проходе через корень четной кратности знак сохраняется.

Вопросы для самоконтроля:

1. Что называется простейшими тригонометрическими неравенствами?

2. Проиллюстрируйте решение неравенства $\sin x > m$ на единичной окружности.

3. Расскажите о методе замены переменной пи решении тригонометрических неравенств.

4. Как применяется метод интервалов при решении тригонометрических неравенств?

Литература:

[1] С. 193 – 318; [4] С. 279 – 329; [12] – [21].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература:

1. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: учеб. для общеобразоват. организаций: базовый и углубл. уровни / [С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин]. – М.: Просвещение, 2014. – 431 с.
2. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: учеб. для общеобразоват. организаций: базовый и углубл. уровни / [С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин]. – М.: Просвещение, 2014. – 464 с.
3. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 10-11 классы: учеб. для общеобразоват. организаций: базовый и углубл. уровни / [Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др.]. – М.: Просвещение, 2014. – 255 с.
4. Пратусевич М. Я. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: учеб. для общеобразоват. организаций: углубл. уровень / М. Я. Пратусевич, К. М. Столбов, А. Н. Головин. – М.: Просвещение, 2014. – 415 с.
5. Пратусевич М. Я. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: учеб. для общеобразоват. организаций: углубл. уровень / М. Я. Пратусевич, К. М. Столбов, А. Н. Головин. – М.: Просвещение, 2014. – 463 с.

Дополнительная литература:

6. Александров А. Д. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 10 класс: учеб. для общеобразоват. организаций: углубл. уровень / А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик. – М.: Просвещение, 2014. – 271 с.
7. Александров А. Д. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 11 класс: учеб. для общеобразоват. организаций: углубл. уровень / А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик. – М.: Просвещение, 2014. – 272 с.
8. Башмаков М.И. Математика: учебник для учреждений нач. и сред. проф. образования / М.И. Башмаков. – 8-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2013. – 256 с.
9. Башмаков М.И. Математика. Сборник задач профильной направленности: учеб. пособие для учреждений сред. проф. образования / М.И. Башмаков. – 5-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2014. – 208 с.

10. Башмаков М.И. Математика. Задачник: учеб. пособие для студентов учреждений сред. проф. образования / М.И. Башмаков. – 5-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2014. – 416 с.

11. Шипачев В.С. Математика: учебник и практикум для СПО / В.С. Шипачев; под ред. А.Н.Тихонова. – 8-е изд., перераб. и доп. – М.: Издательство Юрайт, 2014. 447 с.

Электронные ресурсы:

12. Вся элементарная математика: Средняя математическая интернет-школа – Режим доступа: http://www.bymath.net

13. Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов – Режим доступа: http://school-collection.edu.ru/

14. Единое окно доступа к образовательным ресурсам – Режим доступа: http://window.edu.ru

15. Образовательный математический сайт Exponenta.ru – Режим доступа: http://www.exponenta.ru/

16. Общероссийский математический портал – Режим доступа: www.mathnet.ru

17. Открытый колледж: Математика – Режим доступа: http://college.ru/matematika/

18. Портал Allmath.ru — Вся математика в одном месте – Режим доступа: http://www.allmath.ru

19. Портал информационной поддержки Единого государственного экзамен – Режим доступа: http://www.ege.edu.ru/

20. Российский общеобразовательный портал – Режим доступа: http://school.edu.ru

21. Федеральный центр информационно-образовательных ресурсов – Режим доступа: http://fcior.edu.ru/

МАТЕМАТИКА

Конспект лекций

для студентов 1 курса

очной формы обучения